

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

*До захисту допущено
кафедрою прикладної математики, протокол № 5 від 12 червня 2026 р.*

*завідувач кафедри
прикладної математики
доктор фіз.-мат. наук, професор*

Валерій КОРОБОВ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

здобувача першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**«Адаптивне керування динамічними системами з використанням
RBF нейронних мереж»**

Спеціальність 113 Прикладна математика
Освітня програма Прикладна математика

Здобувач

Михайло КІТАЄВСЬКИЙ

Науковий керівник

кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики
Максим БЕБІЯ

Харків – 2026

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційну роботу присвячено дослідженню нелінійних керованих систем в умовах невизначеності. Об'єктом дослідження є процеси адаптивного керування нелінійними динамічними системами за наявності невідомих збурень. Предметом вивчення є методи та алгоритми побудови законів керування на основі радіально-базисних (RBF) нейронних мереж у межах концепції детермінованого навчання. Методологічну основу роботи становлять прямий метод Ляпунова для аналізу стійкості та математично обґрунтованої побудови законів керування, апарат штучних нейронних мереж для онлайн-апроксимації невідомих складових динаміки, а також комп'ютерне моделювання у програмному середовищі Python. У результаті проведеного дослідження синтезовано стійкий закон адаптивного керування на основі RBF-мережі, що забезпечує компенсацію структурних невизначеностей об'єкта.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в дослідженні впливу концепції детермінованого навчання та умови постійного збудження сигналів на процес налаштування параметрів RBF-мережі в задачах адаптивного керування нелінійними системами. Результати чисельного експерименту підтверджують, що розроблений адаптивний закон керування (регулятор) забезпечує стабілізацію замкнутої системи. Застосування RBF-мереж дозволяє здійснювати онлайн-апроксимацію невідомих нелінійних складових динаміки, що забезпечує ефективне застосування запропонованого підходу в задачах адаптивного керування в умовах невизначеності.

Ключові слова: адаптивне керування, RBF-нейронна мережа, нелінійна система, метод функції Ляпунова, детерміноване навчання, умова постійного збудження.

ABSTRACT

Mykhailo Kitaievskiy. Adaptive control of dynamic systems using RBF neural networks. The qualification work is devoted to the study of nonlinear controlled systems under conditions of uncertainty. The object of the study is the processes of adaptive control of nonlinear dynamical systems in the presence of unknown disturbances. The subject of the study is methods and algorithms for constructing control laws based on radial-basis-function (RBF) neural networks within the framework of the deterministic learning concept. The methodological basis of the work consists of the direct Lyapunov method for stability analysis and the mathematically justified construction of control laws, the apparatus of artificial neural networks for online approximation of unknown dynamic components, and computer simulation in the Python programming environment. As a result of the conducted research, a stable adaptive control law based on an RBF network has been synthesized, which provides compensation for structural uncertainties of the object.

The scientific novelty of the obtained results lies in the study of the influence of the deterministic learning concept and the persistence of excitation condition on the processes of parameter tuning of an RBF network in adaptive control problems for nonlinear systems. The results of the numerical experiment confirm that the developed adaptive control law provides stabilization of the closed-loop system. The use of RBF networks makes it possible to perform online approximation of unknown nonlinear dynamic components, which ensures the effective application of the proposed approach in adaptive control problems under conditions of uncertainty.

Keywords: adaptive control, RBF neural network, nonlinear system, Lyapunov function method, deterministic learning, persistence of excitation.

ЗМІСТ

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ.....	5
ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ АДАПТИВНОГО КЕРУВАННЯ ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ	3 9
1.1. Нелінійні динамічні системи та особливості задач адаптивного керування	9
1.2. Архітектура та апроксимаційні властивості RBF-нейронних мереж... ..	11
1.3. Обмеження класичної адаптації та проблема збіжності параметрів	13
Висновки до розділу 1	14
РОЗДІЛ 2. СИНТЕЗ АДАПТИВНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ RBF-МЕРЕЖ.....	16
2.1. Математична модель об'єкта керування та постановка задачі відстеження.....	16
2.2. Синтез закону керування та адаптивного алгоритму навчання RBF-мережі.....	17
2.3. Аналіз стійкості адаптивної системи методом Ляпунова.....	19
Висновки до розділу 2	20
РОЗДІЛ 3. ДЕТЕРМІНОВАНЕ НАВЧАННЯ ТА УМОВА ПОСТІЙНОГО ЗБУДЖЕННЯ.....	22
Висновки до розділу 3	24
РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ АДАПТИВНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ.....	25
4.1. Опис тестової системи та параметрів моделювання	25
4.2. Аналіз базової модельно-орієнтованої системи керування.....	29
4.3. Дослідження адаптивного нейромережевого регулятора та порівняльний аналіз	32
Висновки до розділу 4	37
ВИСНОВКИ.....	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	42
ДОДАТКИ.....	44
Додаток А. Програмна реалізація модельно-орієнтованого підходу до керування нелінійною системою.....	44
Додаток Б. Програмна реалізація адаптивної нейромережевої схеми керування нелінійною системою.....	47

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

Скорочення	Розшифрування
RBF (Radial Basis Function)	Радіальна базисна функція
RBF-мережа, RBF Neural Network	Радіально-базисна мережа / Радіально-базисна нейронна мережа
PE (Persistence of Excitation)	Умова постійного збудження
DL (Deterministic Learning)	Детерміноване навчання

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний розвиток високотехнологічних галузей висуває жорсткі вимоги до якості функціонування систем автоматичного керування, зокрема до їхньої точності, надійності та здатності адаптуватися до змінних умов. У цьому контексті важливими стають задачі ідентифікації невідомих параметрів [11] та моделювання складних динамічних процесів [4], які переважно мають суттєво нелінійний характер [11]. Традиційні аналітичні підходи [6], орієнтовані на спрощення, зокрема шляхом лінеаризації моделей, часто виявляються неефективними для об'єктів із високим рівнем параметричної невизначеності або складною внутрішньою динамікою.

В останні роки активно розвивається напрям інтелектуального керування [7, 10], що базується на методах штучного інтелекту. Серед них особливе місце посідають штучні нейронні мережі [4, 13, 14], що пояснюється їхніми універсальними апроксимаційними властивостями та здатністю до онлайн-навчання на основі поточних даних. Для задач адаптивного керування в режимі реального часу одними з найбільш перспективних є радіально-базисні (RBF) нейронні мережі [3, 4, 9]. Вони характеризуються простою архітектурою, відносно простою процедурою навчання та лінійністю за параметрами у вихідному шарі, що значно спрощує синтез стійких законів адаптації [4, 7, 8, 10].

Проте класичні схеми нейромережевої адаптації мають суттєве обмеження. Вони забезпечують зменшення похибки керування та обмеженість сигналів системи, однак не гарантують збіжності оцінок ваг до їх істинних значень [5]. Це ускладнює досягнення повної ідентифікації параметрів системи в умовах недостатнього збудження. Ефективним підходом до розв'язання цієї проблеми є застосування концепції детермінованого навчання (deterministic learning) [12]. Цей підхід ґрунтується на виконанні умови постійного збудження (persistence of excitation) [2, 8], що дозволяє досягти

асимптотичної збіжності параметрів і сформуванати точну локальну модель невідомої динаміки.

Враховуючи все вище сказане, дослідження та синтез адаптивних систем керування для розв'язання задач стабілізації на основі RBF-мереж із залученням концепції детермінованого навчання є актуальним науково-прикладним завданням, оскільки створює підґрунтя для побудови стійких та точних інтелектуальних регуляторів для складних нелінійних об'єктів.

Мета дослідження - синтез адаптивної системи керування нелінійними керованими системами з невизначеною динамікою, обґрунтування можливостей застосування концепції детермінованого навчання для підвищення точності й надійності їхнього функціонування, а також порівняльний аналіз модельно-орієнтованого та нейромережевого підходів.

Об'єкт дослідження - нелінійні керовані системи з невизначеною динамікою та параметричними збуреннями в умовах зовнішніх впливів.

Предмет дослідження - методи та алгоритми синтезу адаптивних регуляторів на основі RBF-нейронних мереж у межах концепції детермінованого навчання за умови постійного збудження сигналів.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі **завдання**:

1. Проаналізувати сучасні підходи до адаптивного керування нелінійними системами та визначити обмеження класичних методів нейромережевої адаптації.
2. Дослідити апроксимаційні властивості радіально-базисних нейронних мереж та обґрунтувати їхнє застосування у задачах компенсації невідомих нелінійних складових динаміки.
3. Синтезувати закон адаптивного керування та стійкий алгоритм онлайн-налаштування ваг RBF-мережі з використанням прямого методу Ляпунова.
4. Проаналізувати роль умови постійного збудження у процесі навчання нейронної мережі та формуванні локальної бази знань у межах концепції детермінованого навчання.

5. Розробити програмну модель системи в середовищі Python, виконати чисельне моделювання та провести порівняльний аналіз модельно-орієнтованого й нейромережевого адаптивного підходів.

Структура роботи. Структурно кваліфікаційна робота складається зі списку скорочень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У **першому розділі** висвітлено теоретичні основи адаптивного керування з використанням нейромережевих технологій. Проаналізовано особливості функціонування нелінійних динамічних систем, архітектуру та апроксимаційні властивості RBF-мереж, а також обмеження класичних схем адаптації. **Другий розділ** присвячено питанням математичного синтезу адаптивної системи керування. Наведено постановку задачі відстеження траєкторії, алгоритм онлайн-навчання нейромережі та математичне обґрунтування стійкості замкнутої системи за допомогою прямого методу Ляпунова.

У **третьому розділі** досліджено концепцію детермінованого навчання та роль умови постійного збудження в адаптивних RBF-системах. Розглянуто вплив інформативності регресора на швидкість, точність та повноту збіжності вагових коефіцієнтів. **Четвертий розділ** присвячено практичній реалізації описаного підходу для розв'язання задачі стабілізації та чисельному моделюванню системи в середовищі Python. Наведено опис тестової моделі й результати комп'ютерного експерименту, а також виконано порівняльний аналіз модельно-орієнтованого та адаптивного підходів до розв'язання задачі стабілізації.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ АДАПТИВНОГО КЕРУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

У цьому розділі розглядаються фундаментальні теоретичні засади застосування нейромережових технологій для автоматичного керування об'єктами в умовах невизначеності. Досліджено математичний опис нелінійних керованих систем другого порядку та обґрунтовано необхідність залучення адаптивних підходів для компенсації невідомої динаміки. Значну увагу приділено аналізу архітектури радіально-базисних (RBF) нейронних мереж, їхнім універсальним апроксимаційним властивостям, перевагам у швидкості навчання та локальному характеру обробки інформації порівняно з іншими структурами. Okремо проаналізовано ключові обмеження класичних схем адаптації, пов'язані з проблемою збіжності вагових коефіцієнтів, що дозволяє математично мотивувати необхідність інтеграції концепції детермінованого навчання.

1.1. Нелінійні динамічні системи та особливості задач адаптивного керування

Сучасні високотехнологічні об'єкти керування, такі як маніпуляційні роботи, безпілотні літальні апарати або високоточні електромеханічні приводи, характеризуються суттєво нелінійною динамікою. Їхня поведінка визначається складною взаємодією внутрішніх параметрів та зовнішніх збурень, що робить задачу керування значно складнішою порівняно з класичними лінійними системами. Тому для їхнього аналізу та синтезу регуляторів необхідні відповідні математичні моделі, здатні повноцінно враховувати ці особливості.

Розглянемо загальний клас нелінійних керованих систем другого порядку з невизначеною динамікою. Математична модель такої системи в загальному вигляді описується рівнянням

$$\ddot{x} = f(x(t), \dot{x}(t)) + u(t),$$

де $x(t)$ - змінна стану системи (наприклад, положення), $u(t)$ - керуючий вхідний сигнал, а $f(x(t), \dot{x}(t))$ - невідома нелінійна функція, яка відображає внутрішню динаміку об'єкта і потребує оцінювання під час роботи. Надалі для зручності аргументи функції $f(x(t), \dot{x}(t))$ будемо об'єднувати у вектор стану $\mathbf{x}(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$. Тоді невідому нелінійну функцію можна записувати у скороченому вигляді як $f(\mathbf{x}(t))$.

Складність керування такими об'єктами полягає в тому, що залежність між вхідними та вихідними сигналами може непередбачувано змінюватися залежно від поточного режиму роботи або впливу навколишнього середовища. Традиційні методи, побудовані на лінеаризації моделі в околі деякої точки, часто не забезпечують належної точності та стійкості за наявності виражених нелінійностей [6]. За таких умов найбільш обґрунтованим є перехід до методів адаптивного керування, що дозволяють автоматично налаштовувати параметри регулятора в режимі реального часу, спираючись на поточну похибку відстеження.

Для компенсації невідомих складових динаміки загальний закон адаптивного керування зазвичай формують у вигляді

$$u(t) = \alpha(x(t), \hat{\theta}(t)),$$

де $\hat{\theta}(t)$ - поточна оцінка невідомих параметрів системи, яка безперервно оновлюється за відповідним алгоритмом адаптації. Успішність такого керування напряму залежить від здатності системи коректно апроксимувати невідому функцію динаміки $f(x(t), \dot{x}(t))$. Саме тому для ідентифікації складних нелінійностей дедалі частіше використовують штучні нейронні мережі. Виступаючи в ролі універсальних апроксиматорів, вони створюють надійне математичне підґрунтя для розробки сучасних адаптивних нейромережових регуляторів.

1.2. Архітектура та апроксимаційні властивості RBF-нейронних мереж

Радіально-базисна нейронна мережа (RBF) належить до класу мереж прямого розповсюдження (feedforward neural networks) [4] і характеризується типовою тришаровою архітектурою. Вхідний шар приймає вектор сигналів $\mathbf{x}(t)$, яким у задачах керування зазвичай виступає вектор стану системи $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ або вектор похибки відстеження та її похідних. Прихований шар містить нейрони з нелінійною активаційною функцією, де кожен вузол реалізує локальну залежність на основі відстані між вхідним вектором та центром базисної функції. Вихідний шар формує результуючий сигнал апроксимації шляхом лінійної комбінації виходів прихованого шару.

Для реалізації активації прихованих вузлів найчастіше використовують функції Гаусса. Значення виходу i -го нейрона обчислюється за формулою [3, 4]

$$h_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right),$$

де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ - вхідний вектор, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$ - центр i -го нейрона у просторі станів, $\sigma_i > 0$ - параметр ширини (відхилення), що визначає радіус впливу базисної функції, а $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|$ - евклідова відстань між вхідним сигналом і центром.

Вихідний сигнал RBF-мережі, який слугує для компенсації невідомої динаміки, описується лінійним за параметрами рівнянням [4, 8]

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}),$$

де $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_N(\mathbf{x})]^T$ - вектор значень гаусових базисних функцій, $\widehat{\mathbf{W}} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ - вектор вагових коефіцієнтів, що налаштовуються алгоритмом адаптації, а N - кількість нейронів прихованого шару.

Головне призначення RBF-мереж у системах керування полягає в апроксимації складних нелінійностей. Завдяки локальному характеру радіальних функцій кожен нейрон відповідає за відтворення специфічної області простору станів, що зменшує ризик перенавчання та покращує

узагальнювальну здатність моделі. Суперпозиція таких локальних відгуків забезпечує формування точного наближення до невідомої динаміки. Водночас лінійність моделі відносно ваг вихідного шару є фундаментальною перевагою, що суттєво спрощує застосування градієнтних методів та підходу Ляпунова, а також сприяє підвищенню швидкості налаштування параметрів. Ця особливість вигідно відрізняє RBF-архітектуру від багат шарових перцептронів (MLP), де нелінійність присутня на всіх рівнях оптимізації.

Теоретичною основою такого підходу є універсальна апроксимаційна властивість. Відомо, що за наявності достатньої кількості прихованих вузлів RBF-мережа здатна наблизити будь-яку неперервну функцію на компактній множині з наперед заданою точністю [9]. З огляду на це припускається існування оптимального (ідеального) вектора ваг \mathbf{W}^* , для якого невідома функція об'єкта може бути подана у вигляді [5, 7]

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}),$$

де $\varepsilon(\mathbf{x})$ - залишкова похибка апроксимації, що є обмеженою величиною $|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \varepsilon_0$ для деякої відомої додатної сталої $\varepsilon_0 > 0$.

Це фундаментальне припущення дозволяє звести складну задачу ідентифікації невідомої нелінійної функції динаміки до проблеми онлайн-оцінювання вагового вектора \mathbf{W} , що і становить основу синтезу стійких адаптивних регуляторів.

Ефективність застосування RBF-мереж у задачах адаптивного керування зумовлена їхніми унікальними архітектурними властивостями, серед яких першочергове значення має локальний характер апроксимації. Оскільки кожна радіальна функція активується лише в околі свого центру, забезпечується точкове опрацювання інформації. Це дозволяє якісно відтворювати складні нелінійні залежності в окремих областях простору станів, суттєво знижуючи ризик перенавчання.

Порівняно з класичними багат шаровими перцептронами (MLP), RBF-мережі мають простішу структуру вихідного шару через лінійну залежність виходу від вагових коефіцієнтів. Це полегшує побудову адаптивних законів

керування та дослідження стійкості з використанням методу функції Ляпунова. У поєднанні з універсальною апроксимаційною здатністю - спроможністю наближати будь-яку неперервну функцію на компактній множині з довільною точністю - ці переваги роблять RBF-архітектуру оптимальним інструментом для ідентифікації динаміки об'єктів у реальному часі при розв'язанні задач теорії керування.

1.3. Обмеження класичної адаптації та проблема збіжності параметрів

У класичних адаптивних алгоритмах, синтезованих за допомогою прямого методу Ляпунова, головною метою є забезпечення стабілізації системи або відстеження заданої траєкторії [5]. Математично такий підхід гарантує обмеженість усіх сигналів у замкнутій системі та асимптотичне зменшення похибки керування. Проте досягнення цієї мети ще не означає, що нейронна мережа автоматично «вивчить» справжню динаміку об'єкта, тобто відбудеться повна збіжність її параметрів до істинних значень.

Для розуміння цієї проблеми варто проаналізувати стандартний адаптивний закон налаштування вагових коефіцієнтів RBF-мережі

$$\hat{W}(t) = -\Gamma h(x(t)) e(t),$$

де $\hat{W}(t)$ - швидкість зміни поточної оцінки ваг, $e(t)$ - похибка відстеження, $h(x(t))$ - вектор радіальних базисних функцій, що виконує роль регресора, а Γ - додатно визначена матриця коефіцієнтів адаптації.

Як видно з наведеного рівняння, оновлення конкретного вагового коефіцієнта відбувається лише за одночасного існування похибки відстеження та достатнього рівня активації відповідної базисної функції. Якщо система функціонує виключно в обмеженій області фазового простору (наприклад, під час стабілізації поблизу однієї точки рівноваги), значна частина базисних функцій практично не активується. Відповідно, ваги, що відповідають за «невідвідані» ділянки простору станів, просто не отримують інформації для корекції.

У результаті регресор $h(\mathbf{x}(t))$ не збуджує всі напрями простору параметрів, і система не має достатньої інформаційної бази для повної ідентифікації ідеального вектора \mathbf{W}^* . У теорії керування цей стан називають неповною або частковою збіжністю параметрів. Аналітично в цьому випадку можна гарантувати лише обмеженість оцінок параметрів $\widehat{\mathbf{W}}(t) \in L_\infty$ та збіжність похибки до малого околу нуля. Асимптотична збіжність самих ваг до істинного вектора параметрів $\widehat{\mathbf{W}}(t) \rightarrow \mathbf{W}^*$ залишається недосяжною без додаткових умов інформативності сигналів.

Щоб подолати це фундаментальне обмеження та забезпечити повну збіжність параметрів, вхідні сигнали повинні задовольняти строгу математичну вимогу - умову постійного збудження (PE) [2, 8]. Виконання цієї умови гарантує достатню інформативність регресора протягом усього часу роботи системи. Саме ця проблема обмеженої збіжності в класичних схемах адаптації виступає головним мотивом для переходу до концепції детермінованого навчання, яка буде детально досліджена в наступних розділах.

Висновки до розділу 1

У першому розділі виконано детальний аналіз теоретичних засад адаптивного керування об'єктами складної природи, що характеризуються суттєво нелінійною динамікою та параметричною невизначеністю. Показано, що традиційні підходи, які базуються на спрощенні або лінеаризації математичних моделей, не завжди спроможні забезпечити належну точність та стійкість за наявності виражених нелінійностей. Це обґрунтовує доцільність переходу до інтелектуальних систем адаптивного керування, здатних автоматично налаштовувати параметри регулятора в режимі реального часу для компенсації невідомих складових динаміки об'єкта.

Оптимальним інструментом для онлайн-ідентифікації неперервних нелінійних функцій визначено радіально-базисні нейронні мережі, які мають

універсальну апроксимаційну здатність. Завдяки локальному характеру гаусових функцій активації прихованого шару та лінійності моделі відносно вагових коефіцієнтів вихідного шару, RBF-мережі забезпечують високу швидкість навчання та спрощують процедуру налаштування параметрів. Це дозволяє ефективно звести проблему наближення невідомого об'єкта до задачі оцінювання оптимального вектора ваг у реальному часі.

Водночас виявлено важливе обмеження класичних адаптивних алгоритмів, синтезованих методом Ляпунова, яке полягає у відсутності гарантії асимптотичної збіжності оцінок параметрів до їхніх істинних значень. За умов стабілізації або обмеженого функціонування системи у фазовому просторі спостерігається лише часткова збіжність ваг, що зумовлено невиконанням умови постійного збудження. Зазначена проблема вказує на необхідність залучення концепції детермінованого навчання, яка за рахунок забезпечення інформативності регресора дозволяє накопичувати знання про динаміку системи.

РОЗДІЛ 2. СИНТЕЗ АДАПТИВНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ RBF-МЕРЕЖ

У цьому розділі представлено математичний метод керування для нелінійних систем другого порядку на основі радіально-базисних нейронних мереж. Сформульовано строгу постановку задачі відстеження еталонної траєкторії та обґрунтовано доцільність введення фільтрованої похибки для зниження розмірності задачі стабілізації. Детально описано структуру закону керування, що поєднує зворотний зв'язок за станом та нейромережеву компенсацію структурних невизначеностей об'єкта, а також наведено градієнтний алгоритм онлайн-навчання вагових коефіцієнтів. Особливу увагу приділено математичному аналізу стійкості замкнутої системи за допомогою прямого методу Ляпунова, що дозволяє аналітично гарантувати обмеженість усіх сигналів та збіжність похибки регулювання до контрольованого околу нуля.

2.1. Математична модель об'єкта керування та постановка задачі відстеження

Розглянемо загальну математичну модель нелінійної динамічної системи другого порядку [6]. Зважаючи на фізичний зміст задачі, де керування здійснюється за прискоренням, рівняння руху доцільно записати у вигляді

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t)) + u(t),$$

де $x(t)$ позначає вихідну змінну системи (наприклад, просторове положення), $u(t) \in \mathbb{R}$ відповідає за керуючий вхідний сигнал, а $f(x, \dot{x})$ відображає невідому нелінійну функцію, що описує складну внутрішню динаміку об'єкта.

Припустимо, що для нашої системи задана еталонна (бажана) траєкторія руху $x_d(t)$, яка є неперервно диференційовною функцією часу в усіх точках. Головна мета полягає у синтезі закону керування, який забезпечує відстеження заданої траєкторії реальним об'єктом, незважаючи на наявність невідомої динаміки. Для формалізації цієї задачі введемо похибку відстеження

$$e(t) = x(t) - x_d(t),$$

та її першу похідну за часом

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_d(t),$$

які характеризують поточне відхилення системи від заданого режиму.

Оскільки наша система є нелінійною, пряме керування похибкою $e(t)$ може призвести до складнощів у забезпеченні стійкості перехідних процесів (умова $e(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$, не буде означати стійкість, тобто похибка на певних відрізках часу може сильно зростати навіть для малих початкових умов). Для їх подолання та спрощення процедури синтезу регулятора введемо так звану узагальнену (або фільтровану) похибку

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t),$$

де $\lambda > 0$ є строго додатним коефіцієнтом. Цей параметр відіграє роль налаштування, оскільки саме він визначає власну динаміку загасання помилки.

Використання такої заміни змінних має глибокий математичний сенс. За умови, що синтезований закон керування зможе забезпечити стабілізацію змінної $s(t) \rightarrow 0$, з диференціального рівняння для узагальненої похибки автоматично впливатиме асимптотична збіжність початкової похибки відстеження $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким чином, складна задача відстеження траєкторії для системи другого порядку зручно зводиться до простішої задачі стабілізації скалярної змінної $s(t)$, що створює математичне підґрунтя для застосування методів Ляпунова в наступних підрозділах.

2.2. Синтез закону керування та адаптивного алгоритму навчання RBF-мережі

Оскільки справжня функція динаміки $f(x, \dot{x})$ залишається невідомою в процесі функціонування об'єкта, для її апроксимації ми застосуємо нейронну мережу з радіальними базисними функціями. Зважаючи на універсальні

апроксимаційні властивості таких мереж [9], невідому нелінійність можна апроксимувати наступним чином [3, 4, 8]:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}),$$

де $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_N(\mathbf{x})]^T$ позначає вектор радіальних базисних функцій (ядер Гаусса), \mathbf{W}^* виступає ідеальним оптимальним вектором вагових коефіцієнтів, а $\varepsilon(\mathbf{x})$ є залишковою похибкою апроксимації. Ця похибка залишається обмеженою на розглянутій області, тобто існує така скінченна додатна стала $\varepsilon_0 > 0$, що виконується нерівність $|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \varepsilon_0$.

У реальному часі оптимальний вектор \mathbf{W}^* нам недоступний, тому оцінювання невідомої функції здійснюється на основі поточних вагових коефіцієнтів нейронної мережі за формулою

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}),$$

де $\hat{\mathbf{W}}$ відображає актуальну оцінку вектора ваг, яка постійно оновлюється алгоритмом навчання.

Спираючись на введену в попередньому підрозділі узагальнену похибку $s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t)$, ми можемо сформулювати загальний закон керування. З огляду на те, що об'єкт є системою другого порядку, компенсуючий сигнал повинен враховувати прискорення на еталонній траєкторії. Тому закон керування набуває вигляду

$$u(t) = \ddot{x}_d(t) - \lambda \dot{e}(t) - k s(t) - \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}),$$

у якому $k > 0$ виступає коефіцієнтом підсилення пропорційного зворотного зв'язку.

Кожен компонент цього керування виконує свою специфічну функцію. Члени $\ddot{x}_d(t)$ та $\lambda \dot{e}(t)$ компенсують відому кінематичну частину динаміки системи і формують необхідну стабілізуючу поведінку похибки. Складова $-k s(t)$ забезпечує притягування траєкторій до поверхні $s(t) = 0$, тоді як нейромержевий компонент $-\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$ бере на себе задачу адаптивної компенсації невідомої внутрішньої нелінійності.

Для того щоб нейронна мережа здатна була навчатися в режимі онлайн, необхідно задати правило оновлення її ваг. З цією метою застосовується класичний градієнтний закон адаптації параметрів [8]

$$\hat{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) s(t),$$

де $\mathbf{\Gamma}$ є додатно визначеною матрицею коефіцієнтів адаптації, що безпосередньо визначає швидкість навчання. Такий алгоритм дозволяє безперервно коригувати параметри RBF-мережі, миттєво реагуючи на поточні відхилення узагальненої похибки $s(t)$, що забезпечує роботу регулятора в умовах структурної невизначеності.

2.3. Аналіз стійкості адаптивної системи методом Ляпунова

Для доведення стійкості замкнутої системи та оцінки якості синтезованого закону керування використаємо прямий метод Ляпунова. Введемо кандидатну функцію Ляпунова, яка одночасно враховує енергію узагальненої похибки відстеження та енергію похибки налаштування параметрів нейронної мережі [5, 6, 8]

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{W}},$$

де $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}}$ позначає поточну похибку оцінки параметрів. Оскільки матриця адаптації $\mathbf{\Gamma}$ є додатно визначеною, функція V також є додатно визначеною відносно змінних s та $\tilde{\mathbf{W}}$, що є базовою вимогою для аналізу стійкості.

Продиференціюємо цю функцію за часом, щоб знайти швидкість зміни енергії системи

$$\dot{V} = s\dot{s} + \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}.$$

Підставляючи в це рівняння вираз для динаміки замкнутої системи, синтезований закон керування та градієнтний алгоритм адаптації параметрів, ми отримуємо можливість спростити вираз. Завдяки специфічній структурі закону навчання члени, що містять невідому похибку параметрів $\tilde{\mathbf{W}}$, взаємно знищуються, і після відповідних перетворень рівняння набуває вигляду

$$\dot{V} = -ks^2 + s\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Зважаючи на те, що залишкова похибка апроксимації RBF-мережі є суворо обмеженою величиною, виконується нерівність $|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \varepsilon_0$. Використовуючи цю властивість, ми можемо оцінити верхню межу для похідної функції Ляпунова

$$\dot{V} \leq -ks^2 + |s|\varepsilon_0.$$

Аналіз отриманої нерівності свідчить, що похідна \dot{V} гарантовано залишається від'ємною поза межами певної області (а саме, коли $|s| > \varepsilon_0/k$). Звідси випливає, що узагальнена похибка $s(t)$ не зростатиме нескінченно, а обов'язково прямуватиме до малого околу нуля, розмір якого прямо пропорційний величині похибки апроксимації ε_0 та обернено пропорційний коефіцієнту підсилення k . Таким чином, у межах побудованої схеми забезпечується практична стійкість системи. Тобто усі внутрішні сигнали замкнутої системи, включно з оцінками параметрів $\hat{W}(t)$, залишаються обмеженими, а похибка відстеження $e(t)$ асимптотично наближається до малого околу нуля.

Слід окремо зауважити, що наведений математичний аналіз стосується загальної адаптивної схеми відстеження траєкторії, побудованої через фільтровану похибку $s(t)$. Однак у розділі 4 розглядається специфічна нелінійна система зі степеневим зв'язком між змінними стану, для стабілізації якої використовується інший нелінійний закон керування за станом. З огляду на це для чисельного експерименту в четвертому розділі буде застосована інша, спеціально сконструйована функція Ляпунова, яка строго узгоджується зі структурою цієї системи після перестановки координат $z_1 = x_2$ та $z_2 = x_1$.

Висновки до розділу 2

У другому розділі здійснено математичний синтез адаптивного закону керування для загального класу нелінійних динамічних об'єктів другого порядку з невизначеною внутрішньою динамікою. У межах поставленої задачі

відстеження еталонної траєкторії було обґрунтовано введення узагальненої фільтрованої похибки, що дозволило звести дослідження складної динаміки системи другого порядку до задачі стабілізації скалярної змінної. На основі цього підходу сформовано загальний закон керування, який поєднує в собі компоненти компенсації відомої кінематики, пропорційний зворотний зв'язок для утримання траєкторій та нейромережевий сигнал для нейтралізації нелінійних невизначеностей об'єкта.

Для забезпечення онлайн-навчання радіально-базисної мережі в режимі реального часу в розділі 4 буде залучено градієнтний закон адаптації вагових коефіцієнтів. Аналіз стійкості розробленої системи виконано за допомогою прямого методу Ляпунова із впровадженням додатно визначеної квадратичної функції, що враховує енергію похибок відстеження та налаштування параметрів. Дослідження похідної цієї функції підтвердило практичну стійкість замкнутої системи, забезпечуючи обмеженість усіх сигналів системи та збіжність похибки керування у контрольовану малу околицю нуля.

Розглянутий класичний апарат відстеження через фільтровану похибку слугує фундаментальним теоретичним підґрунтям для дослідження. Оскільки у практичній частині роботи аналізується спеціальний клас нелінійних систем із кубічними зв'язками між змінними стану, базові алгоритми адаптації зазнають подальшої структурованої модифікації. Це зумовлює перехід до стабілізуючого керування за станом та проектування окремої функції Ляпунова, узгодженої з канонічною формою об'єкта після відповідної перестановки його координат.

РОЗДІЛ 3. ДЕТЕРМІНОВАНЕ НАВЧАННЯ ТА УМОВА ПОСТІЙНОГО ЗБУДЖЕННЯ

У задачах адаптивного керування на основі RBF-нейронних мереж невідома нелінійна функція об'єкта замінюється її нейромережевою оцінкою. Для цього використовуються базисні функції, а вагові коефіцієнти мережі налаштовуються в режимі реального часу. Такий підхід дозволяє компенсувати невідому складову динаміки та зменшити похибку керування. Проте сама наявність адаптації ще не означає, що всі ваги мережі обов'язково збігаються до своїх оптимальних значень.

Причина полягає в тому, що кожна вага змінюється лише тоді, коли відповідна базисна функція достатньо “активується”. Якщо траєкторія системи проходить лише через невелику частину простору станів, то деякі RBF-вузли майже не беруть участь в навчанні. У такому випадку можна гарантувати обмеженість вагових коефіцієнтів, але повна збіжність усіх ваг не забезпечується автоматично [5, 7].

Для повнішого навчання параметрів використовується умова постійного збудження, або PE (Persistence of Excitation). Її зміст полягає в тому, що регресор адаптивної системи має бути достатньо інформативним протягом часу. В адаптивних RBF-системах роль регресора виконує вектор базисних функцій $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$. Формально умову PE можна записати у вигляді інтегральної нерівності [2, 5]:

$$\alpha_1 I \leq \int_t^{t+T} \mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) \mathbf{h}^T(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \leq \alpha_2 I, \quad \forall t \geq 0,$$

яка має виконуватися для всіх $t \geq 0$, де $T > 0$ позначає довжину інтервалу збудження, α_1 та α_2 є додатними сталими, а I - одиничною матрицею. Ця умова означає, що за будь-який проміжок часу довжини T система повинна давати достатньо інформації для налаштування всіх потрібних параметрів.

Зауважимо, що недостатня інформативність регресора системи може призводити до неповного навчання нейронної мережі навіть за умови мінімальних похибок керування. Як наслідок, частина вагових коефіцієнтів

може налаштовується некоректно, що суттєво погіршує точність глобальної апроксимації невідомої функції. Натомість виконання вимоги PE гарантує, що адаптивний закон отримує достатній обсяг інформації для повноцінної корекції всього вектора ваг.

Для RBF-мереж виконання PE залежить не тільки від самого сигналу, а й від того, як розміщені центри базисних функцій, яка вибрана їхня ширина і якою є траєкторія руху системи. Якщо траєкторія є періодичною або проходить через різні області простору станів, активується більше RBF-вузлів. Тоді ваги отримують більше інформації для корекції, і навчання відбувається повніше. Якщо ж система стабілізується в одну точку, то після перехідного процесу траєкторія швидко потрапляє в малу область навколо точки рівноваги. Через це активується лише частина базисних функцій, а повна умова PE зазвичай не виконується.

У зв'язку з цим у літературі розрізняють повну та часткову умову постійного збудження [8]. При виконанні повної умови PE достатньо активується весь вектор базисних функцій, тому можна очікувати збіжність усіх ваг. При виконанні часткової умови PE достатньо активується лише частина RBF-вузлів, і тоді збігаються тільки відповідні вагові коефіцієнти. Інші ваги можуть залишатися обмеженими, але не обов'язково наближаються до оптимальних значень [5, 8].

Саме ця проблема є однією з причин використання концепції детермінованого навчання. Її ідея полягає в тому, що RBF-мережа не тільки компенсує невідому нелінійність під час керування, а й поступово формує інформацію про динаміку об'єкта вздовж тих траєкторій, які система реально проходить [7, 12]. Іншими словами, мережа найкраще “вивчає” не всю область простору станів одразу, а саме ті її частини, де відбувається рух системи.

У підходах пов'язаних з детермінованим навчанням часто використовують RBF-мережі з фіксованими центрами та ширинами базисних функцій [12]. Це зручно, тому що вихід мережі залишається лінійним відносно

вагових коефіцієнтів. Завдяки чому простіше будувати закон адаптації та виконувати аналіз стійкості за допомогою методу функції Ляпунова.

Важливу роль також відіграє розміщення центрів RBF-функцій. Якщо центри розташовані рівномірно по всій великій області, але траєкторія проходить тільки через її малу частину, то багато вузлів може залишитися майже пасивними. Тому в сучасних підходах пропонується розміщувати центри ближче до робочої або бажаної траєкторії системи. Це дозволяє частіше активувати потрібні базисні функції, підвищити інформативність регресора і покращити умови навчання відповідних ваг [8].

Таким чином, умова постійного збудження пояснює, чому в адаптивних RBF-системах не завжди можна очікувати повного навчання всіх параметрів. Для задач стабілізації в точку більш реалістичним результатом є обмеженість ваг та наближена компенсація невідомої нелінійності. Повніше навчання ваг зазвичай можливе тоді, коли траєкторія достатньо інформативна, наприклад у задачах відстеження періодичних сигналів [2, 8, 12].

Висновки до розділу 3

У цьому розділі розглянуто умову постійного збудження та її роль у навчанні RBF-нейронної мережі. Показано, що адаптивний закон може забезпечувати стабілізацію системи та обмеженість сигналів, але для повної збіжності ваг потрібна достатня інформативність регресора.

Підкреслено, що в задачах стабілізації в точку повна умова PE зазвичай не виконується, оскільки траєкторія швидко переходить у малу область навколо точки рівноваги. Через це активується лише частина RBF-вузлів, а частина ваг може залишатися недостатньо навченою.

Концепція детермінованого навчання дозволяє пояснити цей ефект і показує, що RBF-мережа формує локальну модель невідомої динаміки переважно в тих областях простору станів, через які реально проходить траєкторія системи. Наведенні властивості RBF-мереж є важливими для подальшого аналізу результатів моделювання представлених в четвертому розділі.

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ АДАПТИВНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

У цьому розділі представлено практичну реалізацію, комп'ютерне моделювання та порівняльний аналіз досліджених інтелектуальних алгоритмів керування в задачах стабілізації для спеціального класу нелінійних об'єктів другого порядку зі степеневою нелінійністю. Наведено детальний опис тестової моделі, обґрунтовано вибір її числових параметрів та виконано математичний синтез стабілізуючого нелінійного зворотного зв'язку за допомогою спеціально сконструйованої квадратичної функції Ляпунова, узгодженої з канонічною формою об'єкта після перестановки координат. Описано структуру розроблених у середовищі Python обчислювальних моделей для двох варіантів стабілізації, які ґрунтуються на ідеальному модельно-орієнтованому підході із точним знанням внутрішньої динаміки та адаптивному підході на основі радіально-базисної нейронної мережі з градієнтним онлайн-навчанням ваг безпосередньо в замкнутій системі. Головну увагу приділено детальному аналізу отриманих часових залежностей координат стану, керуючих сигналів, траєкторій фазового простору, похибок апроксимації та функції Ляпунова на траєкторії, що дозволило експериментально підтвердити теоретичні положення роботи щодо стійкості відповідних замкнутих систем, а також наочно проілюструвати специфіку прояву детермінованого навчання в задачах стабілізації через обмеження умови постійного збудження.

4.1. Опис тестової системи та параметрів моделювання

У практичній частині дослідження розглядається спеціальна нелінійна динамічна система другого порядку, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + u \end{cases},$$

де $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ позначає вектор стану системи, $u \in \mathbb{R}$ виступає скалярним керуючим сигналом, а $f(\mathbf{x})$ відображає невідому нелінійну функцію внутрішньої динаміки. Для проведення комп'ютерного моделювання та об'єктивної перевірки ефективності запропонованого алгоритму як прихована від регулятора еталонна функція застосовується математичний вираз $f(\mathbf{x}) = \sin x_1 + 0.5x_2^2 + 0.3x_1x_2$.

Варто зазначити, що дана система має некероване нестійке перше наближення. Синтез стабілізуючого зворотного зв'язку для такого об'єкта вимагає підходу, узгодженого з нелінійним законом керування для канонічних систем із кубічною нелінійністю [1]. Шляхом введення допоміжного керування v за формулою $u = -f(\mathbf{x}) + v$ ми можемо компенсувати нелінійність, унаслідок чого рівняння приймають вигляд $\dot{x}_1 = x_2^3$ та $\dot{x}_2 = v$.

Для узгодження отриманої структури з класичною канонічною формою доцільно виконати математичну перестановку просторових координат $z_1 = x_2$ та $z_2 = x_1$. У нових змінних динаміка об'єкта переписується як

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v \\ \dot{z}_2 = z_1^3 \end{cases}$$

Для стабілізації системи в такій модифікованій формі застосовується спеціальний нелінійний закон керування [1]

$$v = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_1^3,$$

де параметри a_1 , a_2 та a_3 підлягають подальшому визначенню.

Виконуючи зворотний перехід до початкових координат системи, ми отримуємо вираз для допоміжного керування у вигляді $v = a_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_2^3$. У межах нашого чисельного експерименту, спираючись на схему синтезу для систем із кубічними нелінійностями [1], ці коефіцієнти були обрані як значення

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -\frac{5}{2},$$

що створює базу для подальшого доведення стійкості за допомогою відповідної функції Ляпунова.

Аналіз стійкості синтезованої системи здійснюється за допомогою методу функцій Ляпунова. Зазначимо, що для гарантування від'ємної визначеності похідної функції Ляпунова в силу відповідної замкнутої системи необхідно забезпечити виконання умов $a_1 < 0$ та $a_3 + \frac{a_2}{a_1} < 0$. Підставляючи попередньо обрані нами параметри, ми переконуємося в їхній коректності, оскільки значення $a_1 = -1 < 0$ та сума $-\frac{5}{2} + \frac{-2}{-1} = -\frac{1}{2} < 0$ повністю задовольняють ці вимоги. Отже, вибір коефіцієнтів узгоджується з критеріями стійкості.

Для такого набору параметрів квадратична функція Ляпунова в нових координатах набуває вигляду

$$V(\mathbf{z}) = z_1^2 + 4z_1z_2 + 5z_2^2,$$

а її похідна вздовж траєкторій замкнутої системи задовольняє нерівність

$$\dot{V} = -2(z_1 + 2z_2)^2 - z_1^4 \leq 0.$$

Повертаючись до початкових просторових координат системи $z_1 = x_2$ та $z_2 = x_1$, отримуємо допоміжне стабілізуюче керування

$$u_{st}(\mathbf{x}) = a_1x_2 + a_2x_1 + a_3x_2^3 = -x_2 - 2x_1 - \frac{5}{2}x_2^3.$$

Відповідна функція Ляпунова у фазових координатах об'єкта матиме вигляд

$$V(\mathbf{x}) = x_2^2 + 4x_1x_2 + 5x_1^2,$$

із похідною, яка також є недодатною

$$\dot{V} = -2(x_2 + 2x_1)^2 - x_2^4 \leq 0.$$

Такий підхід є фундаментально важливим, оскільки коректний аналіз стійкості для цієї спеціальної нелінійної системи має проводитися не через класичну tracking-функцію з другого розділу, а саме через функцію, яка структурно узгоджується з канонічною нелінійною формою системи після перестановки координат.

Загальний закон керування формується як сума стабілізуючої складової $u_{st}(\mathbf{x})$ та нейромережевого сигналу компенсації невідомої нелінійності $\hat{f}(\mathbf{x})$ у вигляді

$$u = u_{st}(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}).$$

Для об'єктивного аналізу ефективності розробленого підходу в чисельному експерименті розглядаються два альтернативні варіанти побудови регулятора.

Перший варіант базується на модельно-орієнтованому підході, де функція динаміки $f(\mathbf{x})$ вважається повністю відомою, тому керуючий сигнал формується точно

$$u = -f(\mathbf{x}) - x_2 - 2x_1 - \frac{5}{2}x_2^3.$$

Другий варіант реалізує адаптивний підхід на основі RBF-нейронної мережі, де невідома функція динаміки замінюється її онлайн-оцінкою $\hat{f}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$, що призводить до відповідного адаптивного закону керування

$$u = -\hat{f}(\mathbf{x}) - x_2 - 2x_1 - \frac{5}{2}x_2^3.$$

Для апроксимації нелінійності застосовується мережа з гаусовими базисними функціями $h_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma_{RBF}^2}\right)$, центри яких \mathbf{c}_i рівномірно розподілені на прямокутній сітці $[-2,2] \times [-2,2]$ по 5 вузлів уздовж кожної координатної осі, що загалом формує масив із $N = 25$ прихованих нейронів.

Налаштування вагових коефіцієнтів $\widehat{\mathbf{W}}(t)$ відбувається за градієнтним законом із введенням коефіцієнта витoku β для запобігання необмеженому зростанню параметрів та підвищення загальної стійкості процесу

$$\dot{\widehat{\mathbf{W}}}(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \eta(t) - \beta \widehat{\mathbf{W}}.$$

Важливо відзначити, що як сигнал адаптації тут використовується не звичайна похибка відстеження, а специфічна комбінація змінних стану $\eta(t) = x_2(t) + 2x_1(t)$, яка безпосередньо фігурує у виразі для похідної функції Ляпунова. Саме такий вибір узгоджує алгоритм навчання з побудованим аналізом стійкості.

У процесі чисельного моделювання матриця адаптації задається у формі $\mathbf{\Gamma} = \gamma I$ зі скалярним коефіцієнтом $\gamma = 8.0$, ширина гаусових функцій встановлюється на рівні $\sigma_{RBF} = 0.9$, а коефіцієнт витoku становить $\beta = 0.02$.

В якості початкового стану системи розглядається $\mathbf{x}(0) = [1.5, -1.0]^T$, а інтегрування диференціальних рівнянь виконується на часовому інтервалі $t \in [0, 15]$ із кроком, що забезпечує 1500 розрахункових точок дискретизації. Головною метою цього чисельного експерименту є комплексне порівняння модельно-орієнтованого та адаптивного підходів, оцінка характеру збіжності станів системи до нуля, а також перевірка точності відтворення невідомої функції RBF-мережею за відсутності ідеальної математичної моделі.

4.2. Аналіз базової модельно-орієнтованої системи керування

Перший етап чисельного експерименту присвячено дослідженню модельно-орієнтованого підходу, який слугує еталоном для подальшого порівняльного аналізу. У цьому випадку припускається, що математична модель внутрішньої динаміки об'єкта є повністю відомою, тому для формування керуючого впливу використовується точна функція $f(\mathbf{x})$. Відповідно, синтезований закон керування містить повну алгоритмічну компенсацію нелінійності та необхідну стабілізуючу складову

$$u = -f(\mathbf{x}) - x_2 - 2x_1 - \frac{5}{2}x_2^3.$$

У процесі комп'ютерного моделювання аналізується часова еволюція змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$, динаміка керуючого сигналу $u(t)$, а також зміна значень заданої Ляпунов-подібної функції $V(\mathbf{x}) = x_2^2 + 4x_1x_2 + 5x_1^2$. Отримані результати у вигляді відповідних часових залежностей наведено на рис. 4.1.

Як видно з наведених графіків, за наявності точної інформації про нелінійну складову, координати стану системи швидко та асимптотично наближаються до нуля, що свідчить про надійну стабілізацію в околі точки рівноваги (0,0). Керуючий сигнал $u(t)$ залишається в строгих допустимих межах і після короткого початкового перехідного процесу плавно змінюється без виникнення різких осциляцій.

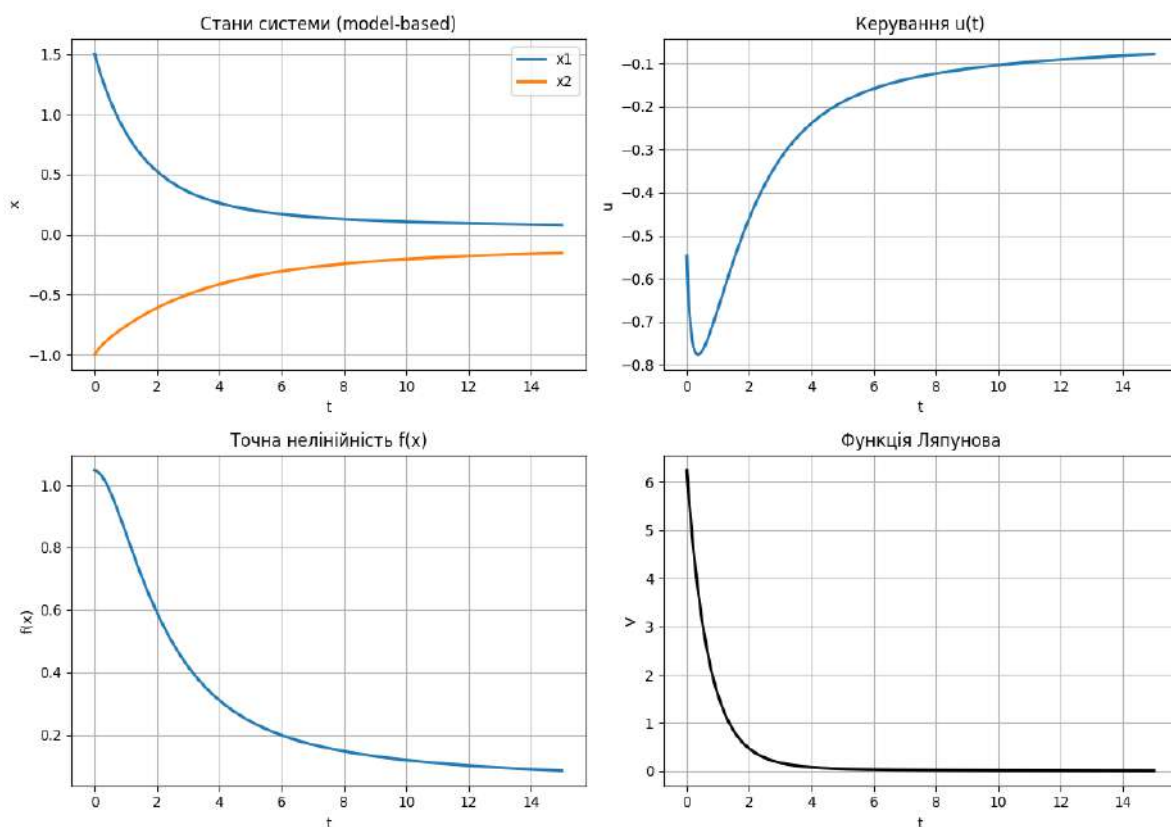


Рис. 4.1. Результати моделювання модельно-орієнтованої системи керування

Особливу увагу варто звернути на поведінку функції Ляпунова $V(\mathbf{x})$, яка монотонно зменшується та прямує до нуля. Це повністю узгоджується з отриманим раніше теоретичним результатом $\dot{V} = -2(x_2 + 2x_1)^2 - x_2^4 \leq 0$ і підтверджує постійне спадання енергії замкнутої системи.

Просторову динаміку системи зручно аналізувати за допомогою фазового портрета, який зображено на рис. 4.2.

Фазова траєкторія демонструє плавний та цілеспрямований рух системи від початкового стану до початку координат. Відсутність розбіжності траєкторій чи нестійких граничних коливань наочно підтверджує коректність побудованого нелінійного стабілізуючого закону керування та гарантовану збіжність стану об'єкта до стаціонарного режиму.

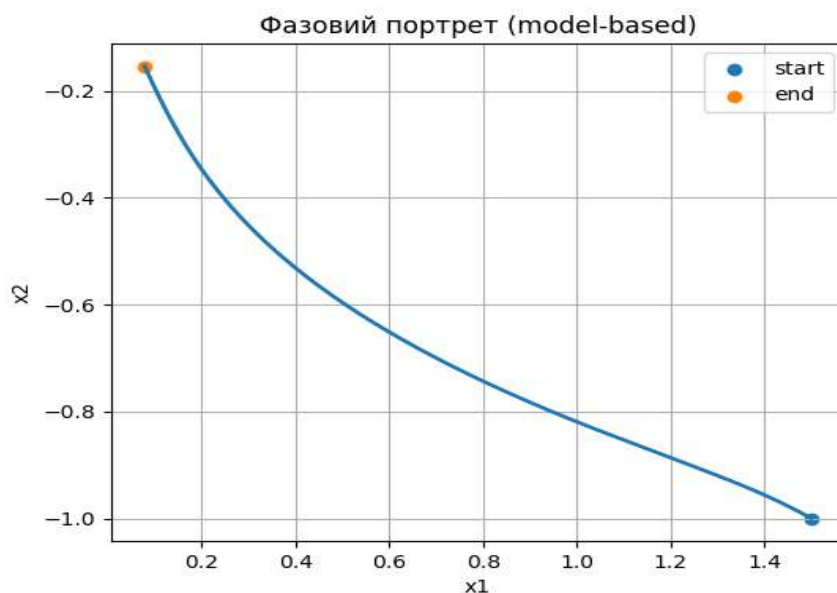


Рис. 4.2. Фазовий портрет модельно-орієнтованої системи керування

З метою попередньої перевірки апроксимаційних можливостей радіально-базисної нейронної мережі, після завершення базового моделювання було додатково виконано офлайн-оцінку невідомої нелінійності безпосередньо вздовж отриманої траєкторії станів. Для кожного дискретного моменту часу формувався вектор базисних функцій $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, після чого оптимальні оцінки вагових коефіцієнтів розраховувалися класичним методом найменших квадратів. Хоча ця оцінка програмно не використовувалася при побудові керування, результати такого моделювання наведено на рис. 4.3.

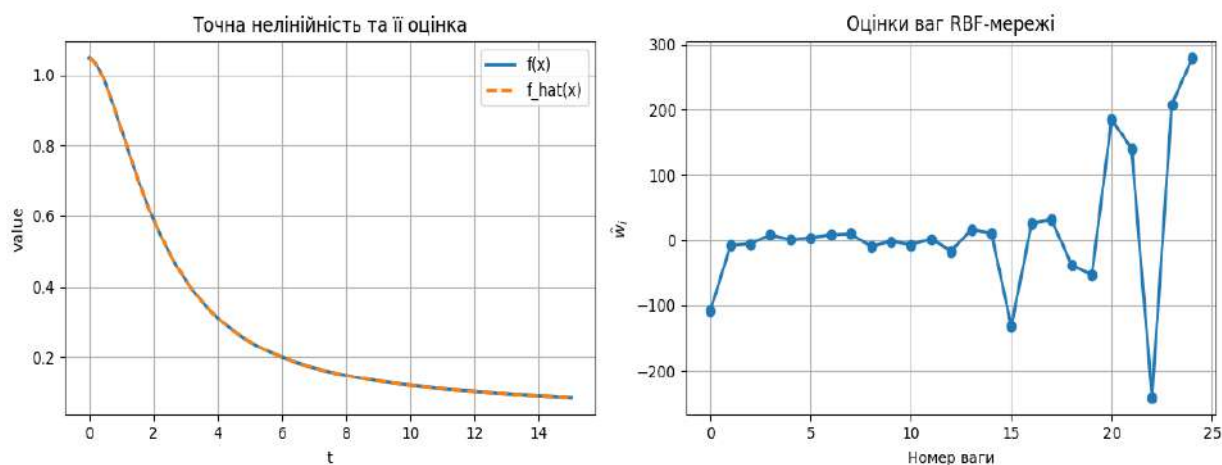


Рис. 4.3. Офлайн-апроксимація нелінійної динаміки за допомогою RBF-мережі та розподіл вагових коефіцієнтів

Графіки ілюструють достатню точність відтворення істинної нелінійності $f(\mathbf{x})$ за допомогою обраної нейромережевої структури. Отримані значення вагових коефіцієнтів залишаються строго обмеженими, а розбіжність між реальною функцією та її оцінкою є невеликою на розглянутому інтервалі моделювання.

Отримані результати підтверджують стійкість процесу параметричного оцінювання та створюють надійне математичне підґрунтя для переходу до наступного етапу дослідження, де RBF-мережа буде інтегрована у схему побудови адаптивного керування в умовах невизначеності.

4.3. Дослідження адаптивного нейромережевого регулятора та порівняльний аналіз

Другий варіант чисельного експерименту відповідає безпосередньому застосуванню адаптивного підходу на основі RBF-нейронної мережі. У цій реалістичнішій ситуації внутрішня функція динаміки $f(\mathbf{x})$ вважається повністю невідомою системі керування та в режимі реального часу замінюється її нейромережевою оцінкою $\hat{f}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$. Відповідно, синтезований закон керування набуває вигляду суми стабілізуючого нелінійного зворотного зв'язку та сигналу нейромережевої компенсації

$$u = -\hat{f}(\mathbf{x}) - x_2 - 2x_1 - \frac{5}{2}x_2^3.$$

Процес навчання мережі, тобто безперервна адаптація вектора оцінки вагових коефіцієнтів $\widehat{\mathbf{W}}$, здійснюється за модифікованим градієнтним алгоритмом

$$\dot{\widehat{\mathbf{W}}} = \Gamma \mathbf{h}(\mathbf{x})\eta - \beta \widehat{\mathbf{W}},$$

де матриця адаптації формується як $\Gamma = \gamma I$, а сигнал $\eta = x_2 + 2x_1$, логічно впливає з побудованої раніше функції Ляпунова. Наявність додаткового члена витоку зі скалярним коефіцієнтом $\beta > 0$ відіграє критично важливу роль для запобігання неконтрольованому зростанню параметрів та забезпечення загальної робастності процесу навчання.

Для чисельної візуалізації енергії системи у випадку адаптивного керування застосовується не класична строга функція Ляпунова (яка потребувала б знання ідеального вектора похибок параметрів W^*), а її Ляпунов-подібний аналог

$$V_a(\mathbf{x}, \widehat{W}) = x_2^2 + 4x_1x_2 + 5x_1^2 + \frac{1}{\gamma} \|\widehat{W}\|^2.$$

Введення доданка, пропорційного квадрату норми вагових коефіцієнтів, слугує надійним індикатором обмеженості адаптивного процесу та дозволяє інтегрально оцінити стабільність замкнутої системи під час онлайн-навчання мережі.

Результати моделювання роботи адаптивного регулятора, що включають часові залежності станів, керування, похибки апроксимації та функції $V_a(\mathbf{x}, \widehat{W})$, представлені на рис. 4.4.

Аналіз отриманих графіків підтверджує, що нейромережевий регулятор успішно забезпечує стабілізацію системи та компенсацію невідомої нелінійності. На відміну від еталонного модельно-орієнтованого підходу, на початковому етапі тут чітко простежується перехідний процес, зумовлений онлайн-налаштуванням ваг. Це проявляється у вигляді високочастотних коливань оцінки $\hat{f}(\mathbf{x})$, сплесків похибки апроксимації та відповідних осциляцій керуючого сигналу.

Однак у міру накопичення інформації RBF-мережа починає відтворювати базові властивості об'єкта, розбіжність між $\hat{f}(\mathbf{x})$ та $f(\mathbf{x})$ стрімко зменшується, а якість стабілізації покращується. Попри дещо повільнішу збіжність у перехідному режимі, система гарантовано зберігає обмеженість усіх сигналів. Ляпунов-подібна функція $V_a(\mathbf{x}, \widehat{W})$ демонструє загальну тенденцію до спадання, що підтверджує стійкий характер синтезованого процесу адаптації.

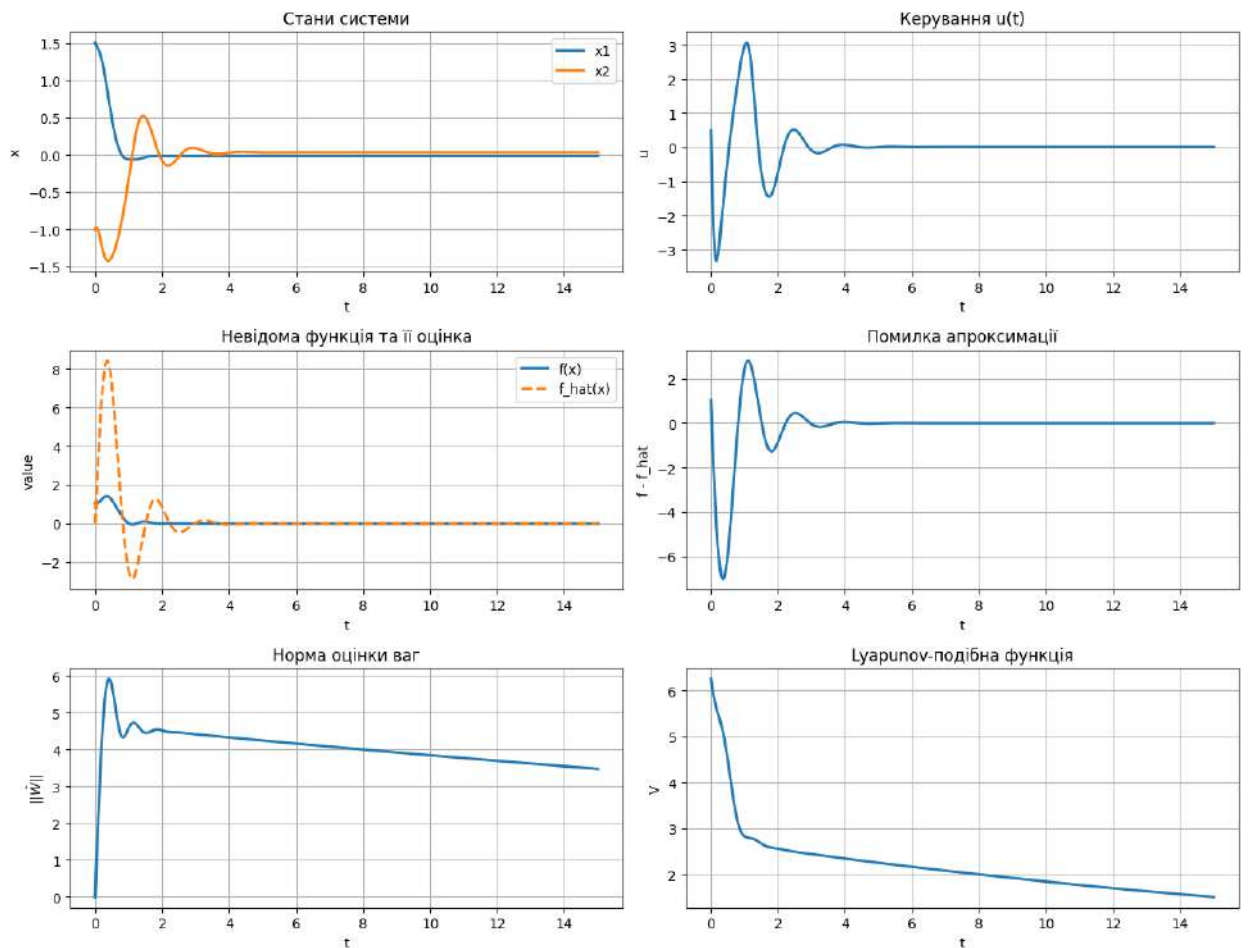


Рис. 4.4. Динаміка замкнутої системи з адаптивним нейромережевим регулятором

Динаміку перехідного процесу також наочно ілюструє фазовий портрет адаптивної системи, наведений на рис. 4.5.

Порівняно з ідеальним випадком (рис. 4.2), траєкторія руху станів $x_1(t)$ та $x_2(t)$ має суттєво складнішу геометрію на початковому етапі. Такі викривлення є прямою ціною за відсутність знань про об'єкт та компенсацію невизначеності "на льоту". Попри це траєкторія прямує до положення рівноваги.

Окрему увагу варто приділити аналізу точності відтворення функції динаміки та збіжності самих параметрів нейронної мережі, що проілюстровано на рис. 4.6.

Найбільші відхилення похибки апроксимації $e_f(t) = f(\mathbf{x}(t)) - \hat{f}(\mathbf{x}(t))$ виникають саме в моменти, коли траєкторія перетинає ділянки фазового простору з неадапованими центрами базисних функцій. Важливо відзначити

фундаментальну особливість: оскільки розглядається задача стабілізації в точку, фазова траєкторія з часом повністю концентрується в малій області навколо початку координат. Унаслідок цього повне просторове збудження всіх вузлів нейронної мережі об'єктивно не досягається, що ідеально узгоджується з теоретичним аналізом умови постійного збудження (PE), проведеним у третьому розділі.

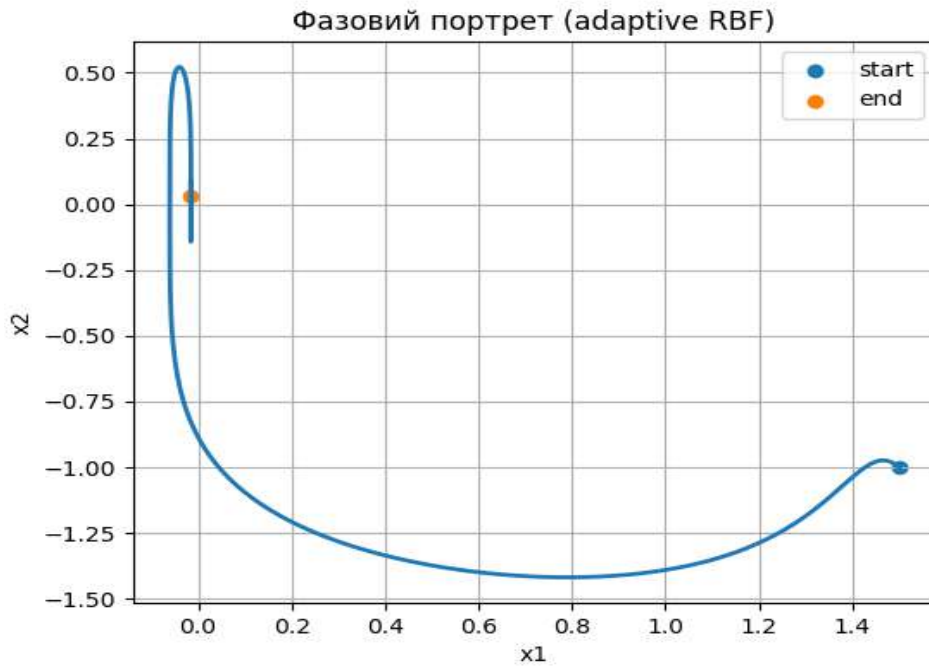


Рис. 4.5. Фазовий портрет адаптивної системи керування з RBF-мережею

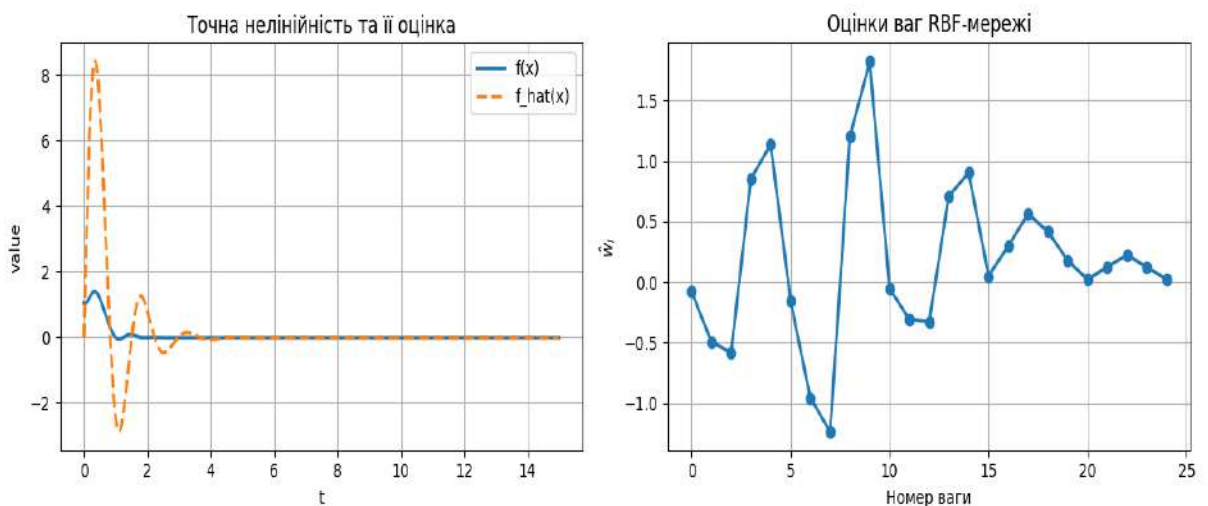


Рис. 4.6. Точність нейромережевої апроксимації та розподіл адаптованих вагових коефіцієнтів

Обмежені можливості виконання умови PE в цій задачі зумовлюють неповну збіжність ваг, хоча їхня норма впевнено утримується в безпечних межах завдяки дії робастизуючого члена $-\beta\widehat{\mathbf{W}}$.

Значення скалярного коефіцієнта адаптації $\gamma = 8.0$ було обрано як компромісне: воно забезпечує стабільне навчання, проте подальше його збільшення для прискорення реакції мережі могло б спровокувати небажані осциляції керування. Перспективним шляхом вдосконалення цієї архітектури є застосування перемикальної модифікації алгоритму витoku (leakage algorithm - при оновленні ваг стара інформація для областей, де погано виконується умова PE, поступово “забувається”), за якої член $-\beta\widehat{\mathbf{W}}$ активується виключно при наближенні норми ваг до критичного порогу, що дозволить мінімізувати деградацію точності апроксимації в стаціонарному режимі.

З теоретичної точки зору, можна розглянути функцію Ляпунова

$$V(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{W}}) = x_2^2 + 4x_1x_2 + 5x_1^2 + \frac{1}{\gamma}\widetilde{\mathbf{W}}^T\widetilde{\mathbf{W}},$$

де $\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \widehat{\mathbf{W}}$. Зауважимо, що $\dot{\widetilde{\mathbf{W}}} = -\dot{\widehat{\mathbf{W}}} = -(\Gamma\mathbf{h}(\mathbf{x})\eta - \beta\widehat{\mathbf{W}})$. Похідна цієї функції Ляпунова в силу відповідної системи має вигляд

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{W}}) = -2(x_2 + 2x_1)^2 - x_2^4 + 2(x_2 + 2x_1)(f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})) + \frac{1}{\gamma}\dot{\widetilde{\mathbf{W}}}^T\widetilde{\mathbf{W}}$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\widetilde{\mathbf{W}}^T\dot{\widetilde{\mathbf{W}}} = -2\eta^2 - x_2^4 + 2\eta(\mathbf{W}^{*T}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{W}}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}))$$

$$- \frac{2}{\gamma}(\mathbf{W}^* - \widehat{\mathbf{W}})^T(\Gamma\mathbf{h}(\mathbf{x})\eta - \beta\widehat{\mathbf{W}}) = -2\eta^2 - x_2^4 + 2\eta(\mathbf{W}^{*T} - \widehat{\mathbf{W}}^T)\mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$+ 2\eta\varepsilon(\mathbf{x}) - 2\eta(\mathbf{W}^{*T} - \widehat{\mathbf{W}}^T)\mathbf{h}(\mathbf{x}) + 2\frac{\beta}{\gamma}(\mathbf{W}^* - \widehat{\mathbf{W}})^T\widehat{\mathbf{W}} \leq -2\eta^2 - x_2^4$$

$$+ 2|\eta|\varepsilon_0 - 2\frac{\beta}{\gamma}\widehat{\mathbf{W}}^T\widehat{\mathbf{W}} + 2\frac{\beta}{\gamma}\mathbf{W}^{*T}\widehat{\mathbf{W}}.$$

Отже, похідна функції Ляпунова буде залишатися від’ємною поза межами певної області навколо нуля. Це гарантує обмеженість сигналів замкнутої системи (в яку інтегровано закон адаптації ваг), зокрема, вектора

оцінки ваг $\widehat{W}(t)$ та прямування розв'язків системи до околу нуля. Тобто забезпечено практичну стійкість замкненої системи.

Підсумовуючи, порівняльний аналіз демонструє закономірний компроміс. Модельно-орієнтований підхід виграє у швидкодії та якості перехідного процесу завдяки наявності повної математичної інформації. Водночас адаптивний нейромережевий регулятор, хоча й поступається за початковою швидкістю стабілізації, має принципову та вирішальну перевагу - він здатен ефективно та безпечно керувати об'єктом в умовах жорсткої структурної невизначеності. Запропонована архітектура успішно генерує стабілізуюче керування на основі RBF-мережі, яка ідентифікує невідому нелінійність безпосередньо в процесі керування, що повністю підтверджує працездатність та перспективність застосованої теоретичної бази [10]. Для повнішого розкриття потенціалу детермінованого навчання в майбутніх дослідженнях доцільно перейти від задачі стабілізації в точку до задачі відстеження періодичних еталонних траєкторій (наприклад, $x_d(t) = \sin t$), що забезпечить багатший спектр збудження регресора та вищу точність глобальної апроксимації.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі виконано практичну реалізацію та комплексне чисельне дослідження розглянутих алгоритмів керування для спеціального класу нелінійних систем другого порядку з кубічним зв'язком між змінними стану. З використанням заміни координат та переходу до канонічної форми синтезовано стабілізуюче керування зі зворотним зв'язком, параметри якого розраховано за допомогою квадратичної функції Ляпунова, узгодженої з нелінійною структурою системи. Сформовано дві альтернативні схеми керування, що включають базовий модельно-орієнтований підхід із повною компенсацією нелінійності, а також адаптивний підхід на основі радіально-базисної нейронної мережі.

Результати комп'ютерного моделювання, проведеного в програмному середовищі Python, підтвердили теоретичні положення роботи щодо стійкості та працездатності обох підходів. Встановлено, що модельно-орієнтоване керування очікувано демонструє вищу швидкодію та гладкий характер перехідних процесів за рахунок використання точних аналітичних значень функції динаміки. Адаптивний нейромережевий регулятор забезпечив практичну стабілізацію координат стану в малому околі початку координат в умовах повної апріорної невизначеності щодо невідомої складової внутрішньої динаміки. Онлайн-навчання вагових коефіцієнтів мережі відбувалося за градієнтним алгоритмом безпосередньо в процесі побудови керування, де як сигнал адаптації використано специфічну комбінацію змінних стану, яка безпосередньо фігурує у виразі для похідної функції Ляпунова.

Порівняльний аналіз виявив закономірний компроміс між інформативністю та швидкодією систем, а також наочно проілюстрував викладені у третьому розділі теоретичні закономірності щодо впливу умови постійного збудження (PE). Оскільки в чисельному експерименті розглядалася задача стабілізації в точку, фазові траєкторії швидко локалізувалися в малому околі нуля, що унеможливило повне просторове збудження всіх прихованих вузлів RBF-мережі й призвело до часткової збіжності її параметрів. Попри це, залучення робастизуючого члена витoku дозволило гарантувати сувору обмеженість норми ваг, а Ляпунов-подібна функція продемонструвала монотонне спадання. Це підтвердило високу ефективність нейромережевої компенсації невизначеностей і дозволило обґрунтувати доцільність подальшого переходу до задач слідкування за періодичними сигналами для повнішої реалізації потенціалу детермінованого навчання.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розв'язано актуальну науково-практичну задачу розробки, математичного обґрунтування та чисельного дослідження інтелектуальних систем адаптивного керування нелінійними динамічними об'єктами в умовах структурної та параметричної невизначеності. Відповідно до визначеної мети та поставлених завдань дослідження отримано кілька ключових науково-практичних результатів, які дозволяють судити про повну реалізацію наміченого плану роботи.

На основі вивчення та узагальнення сучасних підходів до проектування нейромережових регуляторів обґрунтовано доцільність застосування архітектури радіально-базисних нейронних мереж для онлайн-апроксимації невідомих нелінійних функцій динаміки. Аналіз теоретичних джерел показав, що універсальні апроксимаційні властивості RBF-мереж, висока швидкість їхнього навчання та локальний характер обробки інформації забезпечують суттєві переваги при компенсації нелінійних збурень порівняно з багат шаровими перцептронами. Разом із тим, підкреслено фундаментальні обмеження класичних схем адаптації, які полягають у неможливості гарантувати точну збіжність вагових коефіцієнтів до їхніх оптимальних значень за відсутності спеціальних умов збудження регресора, що стало теоретичним підґрунтям для залучення новіших концепцій ідентифікації.

У межах виконання математичної частини дослідження здійснено синтез закону адаптивного керування для загального класу нелінійних систем другого порядку. Впровадження узагальненої фільтрованої похибки відстеження дозволило ефективно знизити розмірність задачі та звести її до стабілізації скалярної змінної. Побудований закон керування об'єднав компоненти кінематичної компенсації траєкторії, лінійний зворотний зв'язок та нейромережовий сигнал нейтралізації невизначеностей. За допомогою прямого методу Ляпунова із застосуванням додатно визначеної квадратичної функції енергії похибок теоретично доведено практичну стійкість замкнутої

системи. Математичний аналіз підтвердив, що розроблений градієнтний закон онлайн-навчання ваг забезпечує обмеженість усіх сигналів у системі та збіжність похибки регулювання у контрольовано малий окіл нуля.

Детально досліджено концепцію детермінованого навчання та формалізовано інтегральну умову постійного збудження (PE) для регресора на основі гаусових функцій активації. Встановлено комплексний характер взаємозв'язку між інформативністю сигналів, просторовим розташуванням центрів прихованих вузлів та динамічними показниками навчання, такими як повнота, точність і швидкість параметричної ідентифікації. Підтверджено, що використання RBF-мереж із фіксованими центрами вздовж робочих траєкторій дозволяє зберегти лінійність моделі відносно налаштовуваних параметрів і може покращувати умови виконання вимоги PE порівняно з регулярними сітками. Обґрунтовано, що за умов звичайної стабілізації в точку виконання умови постійного збудження є обмеженим через швидку локалізацію фазових траєкторій, що зумовлює доцільність орієнтації систем детермінованого навчання на відстеження періодичних або повторюваних сигналів.

Практична цінність роботи підтверджена результатами комп'ютерного моделювання розроблених алгоритмів у середовищі Python для спеціальної некерованої за першим наближенням нелінійної системи з кубічним зв'язком між змінними стану. Для цієї системи було побудовано окрему стабілізуючу функцію Ляпунова, узгоджену з її внутрішньою структурою. Порівняльний аналіз модельно-орієнтованого та адаптивного підходів наочно проілюстрував теоретичні положення роботи щодо стійкості та динаміки перехідних процесів. Експериментально підтверджено, що адаптивний нейромережевий регулятор забезпечує успішну стабілізацію об'єкта та онлайн-ідентифікацію невідомої функції динаміки без апріорних знань про її структуру. Неповна збіжність ваг у задачі стабілізації в точку чітко продемонструвала прояв ефекту відсутності повного постійного збудження, при цьому впровадження робастного члена витоку дозволило надійно утримати норму параметрів у

безпечних межах, що підтверджує працездатність та ефективність запропонованого підходу в задачі стабілізації нелінійної системи в умовах невизначеності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bebiya M. O., Korobov V. I. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2016. Vol. 12, No. 2. P. 113–133. URL: <https://doi.org/10.15407/mag12.02.113>
2. Boyd S., Sastry S. Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control. *Automatica*. 1986. Vol. 22, No. 6. P. 629–639. URL: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(86\)90002-6](https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90002-6)
3. Buhmann M. D. *Radial Basis Functions: theory and implementations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 259 p. URL: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241>
4. Haykin S. *Neural Networks and Learning Machines*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2009. 937 p. URL: URL: URL: <https://dai.fmph.uniba.sk/courses/NN/haykin.neural-networks.3ed.2009.pdf>
5. Ioannou P. A., Sun J. *Robust adaptive control*. Mineola, New York: Dover Publications, 2012. 832 p. URL: <https://flyingv.ucsd.edu/krstic/teaching/282/ioannousun.pdf>
6. Khalil H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. 750 p. URL: <https://flyingv.ucsd.edu/krstic/files/Khalil-3rd.pdf>
7. Liu J. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Beijing: Tsinghua University Press; Singapore: Springer Nature, 2018. 325 p. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7_7
8. Liu Q., Li D., Ge S.S. et al. Adaptive feedforward RBF neural network control with the deterministic persistence of excitation. *Neural Comput & Applic*. 2021. Vol. 33, P. 17013–17028. URL: <https://doi.org/10.1007/s00521-021-06293-z>
9. Park J., Sandberg I. W. Universal Approximation Using Radial-Basis-Function Networks. *Neural Computation*. 1991. Vol. 3, No. 2. P. 246–257. URL: https://www.inf.ufrgs.br/~engel/data/media/file/cmp121/RBF_prova.pdf

10. Tran D.-T., Nguyen M.-N., Ahn K. K. RBF Neural Network Based Backstepping Control for an Electrohydraulic Elastic Manipulator. Applied Sciences. 2019. Vol. 9, No. 11. Art. 2237. URL: <https://doi.org/10.3390/app9112237>
11. Zhu Y. Multivariable System Identification For Process Control. Oxford: Elsevier, 2001. URL: <https://shop.elsevier.com/books/multivariable-system-identification-for-process-control/zhu/978-0-08-043985-3>
12. Wang C., Hill D. J. Deterministic Learning Theory for Identification, Recognition, and Control. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010. 308 p. URL: <https://doi.org/10.1201/9781315221755>
13. Кондратенко Н. Р., Куземко С. М. Основи нейронних мереж. Теорія та практика: навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2006. 104 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2024/LANZ/Kondratenko_2006_104.pdf
14. Субботін С. О. Нейронні мережі : теорія та практика: навч. посіб. Житомир: Вид. О. О. Євенок, 2020. 184 с. URL: <https://eir.zp.edu.ua/server/api/core/bitstreams/2abb401b-9ee6-4afc-a92a-2de5c332d12f/content>

ДОДАТКИ

Додаток А. Програмна реалізація модельно-орієнтованого підходу до керування нелінійною системою

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# ----- параметри керування -----
a1 = -1.0
a2 = -2.0
a3 = -2.5

# ----- параметри RBF для оцінки ваг -----
grid = np.linspace(-2, 2, 5)
c1, c2 = np.meshgrid(grid, grid)
centers = np.column_stack((c1.ravel(), c2.ravel()))
sigma = 0.9
n_rbf = len(centers)

def h(x):
    vals = np.zeros(n_rbf)
    for i in range(n_rbf):
        d = x - centers[i]
        vals[i] = np.exp(-(d @ d) / (2 * sigma**2))
    return vals

def f_real(x):
    x1, x2 = x
    return np.sin(x1) + 0.5 * x2**2 + 0.3 * x1 * x2

def ode_model_based(t, z):
    x1, x2 = z[0], z[1]
    x = np.array([x1, x2])
    f = f_real(x)

    # model-based керування: точна нелінійність
    u = -f + a1 * x2 + a2 * x1 + a3 * x2**3

    # система
    dx1 = x2**3
    dx2 = f + u
    return np.array([dx1, dx2])

# початкові умови
z0 = np.array([1.5, -1.0])

t0, tf = 0.0, 15.0
t = np.linspace(t0, tf, 1500)
```

```

sol = solve_ivp(
    ode_model_based,
    (t0, tf),
    z0,
    t_eval=t,
    rtol=1e-6,
    atol=1e-8
)

if not sol.success:
    print("Помилка інтегрування:", sol.message)
    raise SystemExit

x1 = sol.y[0]
x2 = sol.y[1]

u_hist = np.zeros_like(sol.t)
f_hist = np.zeros_like(sol.t)
v_hist = np.zeros_like(sol.t)

for i in range(len(sol.t)):
    x = np.array([x1[i], x2[i]])
    f_hist[i] = f_real(x)
    u_hist[i] = -f_hist[i] + a1 * x2[i] + a2 * x1[i] + a3 *
x2[i]**3

    # правильна функція Ляпунова
    v_hist[i] = x2[i]**2 + 4 * x1[i] * x2[i] + 5 * x1[i]**2

plt.figure(figsize=(12, 8))

plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(sol.t, x1, label='x1', linewidth=2)
plt.plot(sol.t, x2, label='x2', linewidth=2)
plt.title('Стани системи (model-based)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(sol.t, u_hist, linewidth=2)
plt.title('Керування u(t)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('u')
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(sol.t, f_hist, linewidth=2)
plt.title('Точна нелінійність f(x)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('f(x)')

```

```

plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(sol.t, v_hist, linewidth=2, color='black')
plt.title('Функція Ляпунова')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('V')
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

plt.figure(figsize=(6, 5))
plt.plot(x1, x2, linewidth=2)
plt.scatter(x1[0], x2[0], label='start')
plt.scatter(x1[-1], x2[-1], label='end')
plt.title('Фазовий портрет (model-based)')
plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('x2')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# ----- оцінка ваг без зміни динаміки системи -----
Phi = np.zeros((len(sol.t), n_rbf))
for i in range(len(sol.t)):
    x = np.array([x1[i], x2[i]])
    Phi[i, :] = h(x)

w_hat, _, _, _ = np.linalg.lstsq(Phi, f_hist, rcond=None)
f_hat_hist = Phi @ w_hat

plt.figure(figsize=(12, 4))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(sol.t, f_hist, label='f(x)', linewidth=2)
plt.plot(sol.t, f_hat_hist, '--', label='f_hat(x)', linewidth=2)
plt.title('Точна нелінійність та її оцінка')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('value')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(w_hat, 'o-', linewidth=2)
plt.title('Оцінки ваг RBF-мережі')
plt.xlabel('Номер ваги')
plt.ylabel(r'$\hat{w}_i$')
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Додаток Б. Програмна реалізація адаптивної нейромережевої схеми керування нелінійною системою

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# ----- параметри RBF -----
grid = np.linspace(-2, 2, 5)
c1, c2 = np.meshgrid(grid, grid)
centers = np.column_stack((c1.ravel(), c2.ravel()))
sigma = 0.9
n_rbf = len(centers)

# ----- параметри керування -----
a1 = -1.0
a2 = -2.0
a3 = -2.5

gamma = 8.0
leak = 0.02

def h(x):
    vals = np.zeros(n_rbf)
    for i in range(n_rbf):
        d = x - centers[i]
        vals[i] = np.exp(-(d @ d) / (2 * sigma**2))
    return vals

def f_real(x):
    x1, x2 = x
    return np.sin(x1) + 0.5 * x2**2 + 0.3 * x1 * x2

def ode_adaptive_2(t, z):
    x1, x2 = z[0], z[1]
    w_hat = z[2:]
    x = np.array([x1, x2])

    h_x = h(x)
    f = f_real(x)
    f_hat = w_hat @ h_x

    # керування
    u = -f_hat + a1 * x2 + a2 * x1 + a3 * x2**3

    # система
    dx1 = x2**3
    dx2 = f + u

    # адаптація ваг
```

```

dw_hat = gamma * (x2 + 2 * x1) * h_x - leak * w_hat

return np.concatenate(([dx1, dx2], dw_hat))

# початкові умови
x0 = np.array([1.5, -1.0])
w_hat0 = np.zeros(n_rbf)
z0 = np.concatenate((x0, w_hat0))

t0, tf = 0.0, 15.0
t = np.linspace(t0, tf, 1500)

sol = solve_ivp(
    ode_adaptive_2,
    (t0, tf),
    z0,
    t_eval=t,
    rtol=1e-6,
    atol=1e-8
)

if not sol.success:
    print("Помилка інтегрування:", sol.message)
    raise SystemExit

x1 = sol.y[0]
x2 = sol.y[1]
w_hat_hist = sol.y[2:]

f_hist = np.zeros_like(sol.t)
fhat_hist = np.zeros_like(sol.t)
u_hist = np.zeros_like(sol.t)
v_hist = np.zeros_like(sol.t)

for i in range(len(sol.t)):
    x = np.array([x1[i], x2[i]])
    w_hat = w_hat_hist[:, i]
    h_x = h(x)

    f_hist[i] = f_real(x)
    fhat_hist[i] = w_hat @ h_x
    u_hist[i] = -fhat_hist[i] + a1 * x2[i] + a2 * x1[i] + a3 *
x2[i]**3

    # правильна Lyapunov-подібна функція
    v_hist[i] = x2[i]**2 + 4 * x1[i] * x2[i] + 5 * x1[i]**2 +
(w_hat @ w_hat) / gamma

w_hat_norm = np.linalg.norm(w_hat_hist, axis=0)
w_hat_final = w_hat_hist[:, -1]

plt.figure(figsize=(13, 10))

```

```

plt.subplot(3, 2, 1)
plt.plot(sol.t, x1, label='x1', linewidth=2)
plt.plot(sol.t, x2, label='x2', linewidth=2)
plt.title('Стани системи')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(3, 2, 2)
plt.plot(sol.t, u_hist, linewidth=2)
plt.title('Керування u(t)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('u')
plt.grid(True)

plt.subplot(3, 2, 3)
plt.plot(sol.t, f_hist, label='f(x)', linewidth=2)
plt.plot(sol.t, fhat_hist, '--', label='f_hat(x)', linewidth=2)
plt.title('Невідома функція та її оцінка')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('value')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(3, 2, 4)
plt.plot(sol.t, f_hist - fhat_hist, linewidth=2)
plt.title('Помилка апроксимації')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('f - f_hat')
plt.grid(True)

plt.subplot(3, 2, 5)
plt.plot(sol.t, w_hat_norm, linewidth=2, color='purple')
plt.title('Норма оцінки ваг')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel(r'$||\hat{W}||$')
plt.grid(True)

plt.subplot(3, 2, 6)
plt.plot(sol.t, v_hist, linewidth=2, color='black')
plt.title('Lyapunov-подібна функція')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('V')
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

plt.figure(figsize=(6, 5))
plt.plot(x1, x2, linewidth=2)
plt.scatter(x1[0], x2[0], label='start')
plt.scatter(x1[-1], x2[-1], label='end')

```

```

plt.title('Фазовий портрет (adaptive RBF)')
plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('x2')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(12, 4))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(sol.t, f_hist, label='f(x)', linewidth=2)
plt.plot(sol.t, fhat_hist, '--', label='f_hat(x)', linewidth=2)
plt.title('Точна нелінійність та її оцінка')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('value')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(np.arange(n_rbf), w_hat_final, 'o-', linewidth=2)
plt.title('Оцінки ваг RBF-мережі')
plt.xlabel('Номер ваги')
plt.ylabel(r'$\hat{w}_i$')
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

```