

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна  
Факультет математики і інформатики  
Кафедра прикладної математики

*До захисту допущено*  
*кафедрою прикладної математики, протокол № 5 від 12 червня 2026 р*

*завідувач кафедри*  
*прикладної математики*  
*доктор фіз.-мат. наук, професор*

*Валерій КОРОБОВ*

## **КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

здобувача першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**«Скінченновимірна модель МГД-нестабільності у системі рідин, що не  
змішуються»**

Спеціальність 113 Прикладна математика  
Освітня програма Прикладна математика

Здобувач  
Науковий керівник

Ярослав ГІЄНКО  
кандидат фіз.-мат. наук,  
доцент кафедри прикладної математики  
Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Харків – 2026

## Анотація

Гієнко Ярослав. Скінченновимірна модель МГД-нестійкості у системі рідин, що не змішуються. 36 сторінок, 8 рисунків, 3 лістинги.

У кваліфікаційній роботі розглянуто магнітогідродинамічну нестійкість межі розділу у двошаровій системі електропровідних рідин, що не змішуються. Досліджено механізм, за якого мала деформація поверхні між шарами змінює локальний розподіл електричного струму, а його взаємодія з магнітним полем створює додаткову силу Лоренца.

Побудовано скінченновимірну двомодову модель руху поверхні розділу. У цій моделі складне хвильове відхилення межі замінено взаємодією двох основних амплітудних мод. Отримана система рівнянь враховує власні частоти коливань, електромагнітний зв'язок між модами, в'язке згасання та періодичну зміну цього зв'язку.

Для нестационарної системи виконано чисельне моделювання.

Побудовано часові графіки двох мод, фазову траєкторію та залежність максимальної амплітуди від частоти модуляції електромагнітного зв'язку. Встановлено, що найбільше посилення коливань виникає поблизу комбінаційної частоти двох основних мод. Також досліджено стаціонарний випадок і проаналізовано стійкість системи за власними значеннями матриці. Ключові слова: магнітогідродинаміка, МГД-нестійкість, поверхня розділу, рідини, що не змішуються, сила Лоренца, скінченновимірна модель, власні значення.

Hiienko Yaroslav. Finite-dimensional model of MHD instability in a system of immiscible liquids. 36 pages, 8 figures, 3 listings.

The qualification work considers magnetohydrodynamic instability of the interface in a two-layer system of immiscible electrically conducting liquids. The study focuses on the mechanism in which a small deformation of the interface changes the local distribution of electric current, while its interaction with the magnetic field produces an additional Lorentz force.

A finite-dimensional two-mode model of the interface motion is constructed. In this model, the complex wave displacement of the boundary is replaced by the interaction of two main amplitude modes. The obtained system takes into account natural oscillation frequencies, electromagnetic coupling between the modes, viscous damping, and periodic variation of this coupling.

Numerical modeling is performed for the nonstationary system.

Time graphs of the two modes, a phase trajectory, and the dependence of the maximum amplitude on the modulation frequency of the electromagnetic coupling are obtained. It is shown that the strongest amplification occurs near the combination frequency of the two main modes. The stationary case is also considered, and the stability of the system is analyzed using eigenvalues of the matrix.

Keywords: magnetohydrodynamics, MHD instability, interface, immiscible liquids, Lorentz force, finite-dimensional model, eigenvalues

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТА МЕХАНІЗМ МГД НЕСТІЙКОСТЕЙ.....	6
1.1 Основні поняття магнітогідродинаміки.....	6
1.2 Взаємодія електричного струму та магнітного поля .....	6
1.3 Механізм виникнення нестійкості поверхні розділу .....	9
РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОБУДОВА МОДЕЛІ .....	11
2.1 Постановка задачі .....	11
2.2 Побудова двомодової моделі .....	11
2.3 Нестационарна система та фазові траєкторії .....	14
РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ .....	21
3.1 Стационарна лінійна система .....	21
3.2 Аналіз чисельних випадків .....	22
ВИСНОВКИ .....	28
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	29
ДОДАТКИ.....	30

## ВСТУП

Динаміка електропровідних рідин під впливом магнітних полів досліджується в межах магнітогідродинаміки (МГД), яка поєднує підходи механіки суцільних середовищ та електродинаміки. Ці процеси можна спостерігати як у природних явищах, так і в промислових установках, що й робить їх вивчення актуальним. У багатьох сучасних технологічних системах використовуються електропровідні рідини: рідкі метали, електроліти та розплави солей. Такі середовища зустрічаються в алюмінієвих електролізерах, рідкометалевих батареях, електрохімічних і металургійних установках. Їхня робота часто відбувається за наявності сильних електричних струмів і магнітних полів, тому рух рідини не можна розглядати окремо від електромагнітної взаємодії.

Практичний інтерес до таких задач пов'язаний з тим, що в багатьох установках електропровідні рідини розташовані шарами і не зміщуються між собою. У роботі Horstmann G. M., Kuhn D., Dohnal T. [1] про параметричне пригнічення МГД-нестійкостей зазначено, що такі міжфазні нестійкості є важливими для алюмінієвих електролізерів і рідкометалевих батарей. В алюмінієвих електролізерах сильні струми можуть спричинити хвильові рухи на межі між рідким алюмінієм і електролітом, а в рідкометалевих батареях динаміка межі розділу впливає на стійкість шаруватої структури системи.

В огляді C. Duczek, G. M. Horstmann, W. Ding [2] про гідродинаміку Na-Zn рідкометалевих батарей розглянуто різні явища, які можуть виникати в таких системах: теплову та концентраційну конвекцію, нестійкість Тейлера, електровихрові течії, вихрові течії, metal pad roll instability, короткохвильові міжфазні нестійкості та нестійкість Кельвіна–Гельмгольца. Це показує, що проблема стійкості межі розділу не є окремим частковим випадком, а належить до ширшого класу задач, важливих для роботи рідкометалевих і електрохімічних систем.

Критичний режим настає тоді, коли початкове мале відхилення на поверхні розділу прогресує з часом замість того, щоб згасати. У такому випадку в системі можуть виникати хвильові рухи, що змінюють локальну товщину шару та розподіл електричного струму. Збурений струм взаємодіє з магнітним полем, унаслідок чого виникає сила Лоренца. Якщо ця сила підтримує початкове збурення, а дисипативні механізми не встигають його пригасити, система може перейти в нестійкий режим.

У роботі Mohammad I., Kelley D. H. [3] розглянуто низьковимірну модель МГД-нестійкості в алюмінієвих електролізерах.

Автори пояснюють, що деформація межі між алюмінієм і електролітом змінює розподіл струму, а взаємодія цього струму з вертикальним магнітним полем може збуджувати хвилі на поверхні розділу. У цій же роботі показано, що така нестійкість часто пов'язана з електромагнітним зв'язком двох гравітаційних хвиль із близькими власними частотами.

Якщо описувати ці явища повністю, доведеться розв'язувати громіздку систему рівнянь МГД, яка враховує одночасний рух рідини, електричний струм, магнітне поле та деформація межі розділу. Проте, щоб розібратися в самому механізмі руйнування стійкості, краще взяти спрощені маловимірні моделі. У роботі Mohammad, Kelley [3] міжфазну МГД-нестійкість подано за допомогою низьковимірної моделі, у якій рух поверхні розділу описується двома основними модами коливань. У роботі Horstmann, Kuhn, Dohnal [1] подібний підхід використано для аналізу системи двох зв'язаних рівнянь типу Матьє.

У цій роботі розглянемо задачу порушення стійкості у двошаровій системі нестисливих електропровідних рідин, крізь які тече електричний струм за наявності зовнішнього магнітного поля. Поверхню розділу будемо описувати через дві основні моди коливань з амплітудами  $X(t)$  та  $Y(t)$ . Акцент зроблено на аналізі того, як взаємний електромагнітний зв'язок мод, затухання (дисипація) та розходження власних частот визначають стійкість рівноважного стану.

Ця робота присвячена побудові та чисельному аналізу скінченновимірної моделі, що описує МГД-нестійкість на межі розподілу у системі незмішуваних електропровідних рідин.

## РОЗДІЛ 1

# ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТА МЕХАНІЗМ МГД НЕСТІЙКОСТЕЙ

### 1.1 Основні поняття магнітогідродинаміки

Основою для аналізу динаміки провідних рідин під впливом електромагнітних сил слугує магнітогідродинаміка (МГД). Цей підхід традиційно застосовується до плазми, розплавів металів чи електролітів [4].

У цій роботі електричний струм вважається наявним у системі незалежно від руху рідин, оскільки розглядається задача, пов'язана з електролізом. Рух рідин і деформація поверхні розділу не створюють струм безпосередньо, а змінюють локальний розподіл густини електричного струму. Цей перерозподілений струм взаємодіє з магнітним полем, унаслідок чого виникає сила Лоренца, яка може впливати на форму поверхні розділу та розвиток нестійкості. Загальний опис магнітогідродинамічних процесів базується на поєднанні рівнянь гідродинаміки та електродинаміки. До них належать рівняння руху рідини, рівняння неперервності, а також рівняння, що описують електромагнітне поле. У повній постановці така система є складною і, як правило, не допускає простого аналітичного розв'язання.

У випадку наявності границі розділу між двома незмішуваними рідинами особливого значення набувають процеси, пов'язані з деформацією цієї поверхні. Навіть незначні відхилення можуть призводити до перерозподілу струмів у рідині, що викликає додаткові електромагнітні сили. Це створює передумови для виникнення нестійкостей.

Таким чином, магнітогідродинамічні системи характеризуються складною взаємодією між рухом рідини, електричними струмами та магнітними полями, що робить актуальним дослідження їх стійкості та динаміки.

### 1.2 Взаємодія електричного струму та магнітного поля

Електропровідна рідина, що рухається в магнітному полі, характеризується наявністю електричних струмів, які виникають у рідині. Ключовим фактором силової взаємодії між індукованими чи зовнішніми струмами та магнітним полем виступає об'ємна сила Лоренца:

$$F = J \times B \quad (1.1)$$

де  $B$  — магнітне поле,

$J$  — густина електричного струму,

У подальшому вважається, що магнітне поле є однорідним і сталим:

$$B = B_0 e_z$$

Сила Лоренца діє перпендикулярно до напрямків струму та магнітного поля і зумовлює виникнення об'ємних сил, що впливають на розподіл швидкості рідини. У випадку наявності межі розділу між двома рідинами деформація поверхні призводить до зміни розподілу струму. Струм у системі можна представити у вигляді суми основної та збуреної складових:

$$J = J_0 + j \quad (1.2)$$

де

$J_0$  — основний струм,

$j$  — збурений струм.

Збурена складова струму взаємодіє з магнітним полем, що призводить до виникнення додаткових сил, які можуть спричиняти розвиток нестійкості поверхні розділу. Для переходу від повної магнітогідродинамічної задачі до скінченновимірної моделі використано ряд спрощувальних припущень. Розглянемо систему з двома електропровідними шарами, між якими знаходиться поверхня розділу. Незбурена товщина верхнього шару позначається через  $h$ , а нижнього шару — через  $H$ . Вісь  $z$  напрямлена вертикально вгору, а початок відліку вибирається на незбуреній поверхні розділу.[3]:

$$J_0 = -J_0 e_z$$

Тут  $J_0$  означає густину електричного струму, а не повний струм. При малому відхиленні поверхні розділу густина струму та магнітне поле подаються як сума основної та збуреної складових:

$$J = J_0 + j$$

$$B = B_0 + b$$

Оскільки характерний час руху поверхні значно перевищує час дифузії магнітного поля, використовується наближення

$$\mu\sigma u h \ll 1$$

де  $\mu$  — магнітна проникність середовища,

$\sigma$  — електропровідність,

$u$  — характерна швидкість руху рідини,

$h$  — характерна товщина шару.

У цьому наближенні електричне поле можна описати через скалярний потенціал  $\phi$ . Тоді закон Ома для електропровідного середовища записується у вигляді

$$J = \sigma E = -\sigma \nabla \phi \quad (1.3)$$

Тут оператор  $\nabla$  означає градієнт потенціалу. Оскільки електричний заряд у рідині не накопичується, виконується умова неперервності струму:

$$\nabla \cdot J = 0$$

Підставляючи закон Ома (1.3) у цю умову, при сталій електропровідності отримуємо рівняння Лапласа для електричного потенціалу:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.4)$$

Таким чином, у спрощеній моделі електричний потенціал визначається з рівняння Лапласа, а збурення поверхні розділу впливає на розподіл струму через зміну геометрії шару. Отже, у спрощеній постановці збурення поверхні розділу впливає на розподіл електричного струму через зміну геометрії шару. Саме цей збурений струм у подальшому взаємодіє з магнітним полем і створює силу Лоренца, що може змінювати форму поверхні розділу.

### 1.3 Механізм виникнення нестійкості поверхні розділу

Просторову конфігурацію межі розділу зручно фіксувати у декартовому базисі  $Oxyz$ . При цьому площину  $Oxy$  сумістимо з рівноважним (незбуреним) станом поверхні, а вісь  $z$  спрямуємо проти вектора сили тяжіння. У незбуреному стані межа між двома рідинами є плоскою і задається рівнем  $z_0$ .

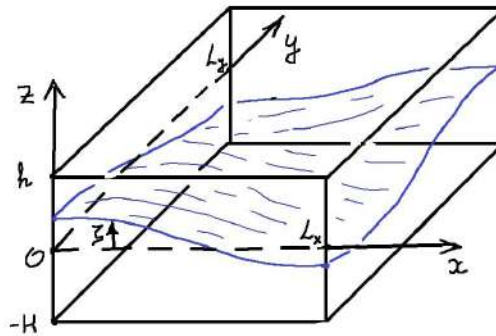


Рисунок 1.1 — Схема двошарової системи рідин у зовнішньому магнітному полі

Розглянемо двошарову систему електропровідних рідин. Верхній шар має характерну товщину  $h$ , а нижній шар —  $H$ . Горизонтальні розміри області вздовж осей  $x$  та  $y$  позначимо через  $L_x$  та  $L_y$ . Надалі ці величини використовуються для опису просторових мод коливань поверхні розділу. На рисунку 1.1 показано: дві рідини, поверхню розділу між ними та вибрану систему координат. Система розглядається за наявності зовнішнього магнітного поля, яке в подальшому враховується через взаємодію з електричним струмом. Відхилення поверхні розділу від рівноважного положення позначимо через  $\zeta$ .

Якщо на поверхні виникає мале збурення, то положення межі між шарами можна записати у вигляді:  $z = z_0 + \zeta(x, y, t)$  (1.5)

Тут  $\zeta(x, y, t)$  описує відхилення поверхні розділу від рівноважного положення. Таке збурення змінює локальну товщину шару рідини:

$$h=h_0+\zeta \quad (1.6)$$

де  $h$  — локальна товщина шару рідини після збурення;

$h_0$  — товщина шару в незбуреному стані;

$\zeta$  — відхилення поверхні розділу.

Зміна товщини шару впливає на розподіл електричного струму. Як було зазначено в формулі (1.2), густину струму в системі можна подати як суму основної та збуреної складових:

$$J=J_0+j$$

Основна складова  $J_0$  відповідає струму в незбуреній системі, а  $J$  виникає внаслідок деформації поверхні розділу. Саме збурена складова струму взаємодіє з магнітним полем і створює додаткову силу Лоренца:

$$f=j\times B$$

Сила  $f$  містить компоненти, що впливають на форму поверхні.

Подальший опис механізму виникнення нестійкості ґрунтується на роботі Herreman W., Nore C. et. al. [5], де пояснено, що деформація межі розділу спричиняє перерозподіл електричного струму, а взаємодія збуреного струму з вертикальним магнітним полем може підсилювати хвильовий рух поверхні розділу. Якщо дія сили Лоренца підтримує початкове збурення, то амплітуда хвилі з часом може зростати. Такий механізм відповідає механізму Селе: мале відхилення межі розділу змінює розподіл струму, після чого збурений струм у магнітному полі створює силу, здатну підтримувати або посилювати хвильовий рух поверхні.

Отже, механізм Селе показує, що втрата стійкості поверхні розділу пов'язана з взаємним впливом трьох чинників: деформації межі розділу, перерозподілу електричного струму та дії сили Лоренца. Якщо електромагнітна сила підтримує початкове збурення, хвильовий рух поверхні може посилюватися. Тому для подальшого дослідження необхідно перейти від якісного опису механізму до математичної моделі, яка дозволить простежити зміну основних мод коливань у часі.

## РОЗДІЛ 2.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОБУДОВА МОДЕЛІ

#### 2.1 Постановка задачі

Повна задача опису руху поверхні розділу є нескінченновимірною, оскільки збурення залежить не лише від часу, а й від просторових координат  $x$  та  $y$ . Для подальшого аналізу залишимо лише дві основні просторові моди, які відповідають коливанням поверхні вздовж напрямків  $X(t)$  та  $Y(t)$ .

#### 2.2 Побудова двомодової моделі

Щоб отримати адекватне скінченновимірне наближення, збурення межі можна подати як суперпозицію базових коливальних мод, що мають найнижчі власні частоти. Такий перехід відповідає ідеї методу Гальоркіна: складна задача для функції  $\zeta(x, y, t)$  замінюється задачею для скінченної кількості часових коефіцієнтів. У нашому випадку такими коефіцієнтами є амплітуди двох основних мод  $X(t)$  та  $Y(t)$ .

Будемо вважати, що горизонтальні розміри області не дуже сильно розрізняються. У такому випадку власні частоти двох основних мод є близькими, що є важливим для виникнення взаємодії між ними. Подамо збурення поверхні у вигляді суми двох основних мод:

$$\zeta = X(t) \cos \frac{\pi x}{L_x} + Y(t) \cos \frac{\pi y}{L_y} \quad (2.1)$$

Тут  $X(t)$  та  $Y(t)$ , введені у формулі (2.1) є амплітудними функціями часу для двох основних мод. Функція  $X(t)$  описує зміну амплітуди збурення вздовж напрямку  $x$ , а функція  $Y(t)$  — вздовж напрямку  $y$ .

Такий підхід дозволяє перейти від задачі для функції  $\zeta(x, y, t)$  до системи звичайних диференціальних рівнянь для  $X(t)$  та  $Y(t)$ . Побудова двомодової системи узгоджується з низьковимірними моделями, розглянутими у роботах Mohammad I., Kelley D., а також Horstmann G., де складна міжфазна МГД-задача

зводиться до взаємодії двох основних мод коливання з близькими власними частотами [1;3].

Користуючись (2.1) у першому наближенні взаємодію двох мод можна описати системою:

$$\begin{aligned}\ddot{X} + \omega_x^2 X &= -aY \\ \ddot{Y} + \omega_y^2 Y &= aX\end{aligned}\quad (2.2)$$

У цій системі доданки  $\omega_x^2 X$  та  $\omega_y^2 Y$  описують власні коливання відповідних мод. Параметри  $\omega_x$  та  $\omega_y$  є власними частотами коливань уздовж напрямків  $x$  та  $y$ . Коефіцієнт  $a$  характеризує силу електромагнітного зв'язку між модами. Через доданки  $-aY$  та  $aX$  коливання вздовж одного напрямку впливають на коливання вздовж іншого напрямку.

Особливо важливим є випадок близьких власних частот мод:

$$\omega_x \approx \omega_y$$

Такий випадок можна записати у вигляді:

$$\omega_y = (1 + \epsilon) \omega_x, \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.3)$$

Малий параметр епсілон показує, наскільки відрізняються власні частоти двох мод. Якщо  $\epsilon$  дуже малий, наприклад  $\epsilon = 0.01$  або  $\epsilon = 0.02$ , то частоти  $\omega_x$  та  $\omega_y$  майже збігаються. Такий випадок відповідає ситуації, коли горизонтальний переріз області є близьким до квадратного, а розміри вздовж напрямків  $x$  та  $y$  відрізняються незначно. У цьому режимі енергія може ефективніше передаватися між  $X(t)$  та  $Y(t)$ , а за наявності фазового зсуву рух поверхні набуває обертового характеру. Якщо ж  $\epsilon$  має більше значення, наприклад  $\epsilon = 0.10$ , то власні частоти мод уже помітніше відрізняються. Це відповідає випадку, коли горизонтальні розміри області вздовж напрямків  $x$  та  $y$  відрізняються сильніше. У такій ситуації для передача енергії між модами стає менш ефективною, тому, для вираженого обертового руху потрібний сильніший електромагнітний зв'язок.

Проміжна система описує взаємодію двох основних мод без урахування в'язкого згасання та часової зміни електричного струму. Для більш реалістичного опису необхідно врахувати дисипативні члени, які відповідають внутрішньому тертю рідини, а також можливу часову зміну густини незбуреного струму.

У роботі окремо враховується роль дисипації при дослідженні metal roll instability, тому в подальшій моделі додамо члени в'язкого згасання [5].

Коефіцієнт електромагнітного зв'язку між модами будемо вважати залежним від часу:

$$k(t) = a(1 + \beta \sin(\omega_b t)) \quad (2.4)$$

Тут  $a$  задає середню силу електромагнітного зв'язку,  $\beta$  характеризує відносну амплітуду періодичної зміни струму,  $\omega_b$  є частотою цієї зміни. Такий запис дозволяє врахувати випадок, коли густина струму має не лише сталу, а й періодично змінну складову.

Після підстановки розкладу (2.1) у першому наближенні взаємодію двох мод можна описати системою:

$$\begin{cases} \ddot{X} + 2\mu_x \dot{X} + \omega_x^2 X = -a(1 + \beta \sin(\omega_b t)) Y \\ \ddot{Y} + 2\mu_y \dot{Y} + \omega_y^2 Y = a(1 + \beta \sin(\omega_b t)) X \end{cases} \quad (2.5)$$

У цій системі доданки  $2\mu_x \dot{X}$  та  $2\mu_y \dot{Y}$  описують в'язке згасання коливань. Параметри  $\mu_x$  та  $\mu_y$  характеризують інтенсивність дисипації для відповідних мод. Якщо ці параметри збільшуються, то згасання коливань стає сильнішим. Множник  $1 + \beta \sin(\omega_b t)$  враховує періодичну зміну густини незбуреного струму, через що електромагнітний зв'язок між модами також стає залежним від часу.

Отримана система рівнянь описує взаємодію двох основних мод коливань поверхні розділу. Функції  $X(t)$  та  $Y(t)$  задають амплітуди цих мод, а електромагнітний зв'язок між ними враховується через коефіцієнт при правих частинах рівнянь. Такий підхід відповідає ідеї низьковимірною опису, коли складний рух поверхні розділу замінюється скінченною кількістю основних

мод. Особливість цієї системи полягає в тому, що коефіцієнт електромагнітного зв'язку може залежати від часу. Наявність множника  $a(1+\beta \sin(\omega_b t))$  означає, що взаємодія між модами має не лише сталу, а й періодично змінну складову.

Через це система є складнішою для безпосереднього аналітичного дослідження стійкості в загальному випадку, оскільки її коефіцієнти вже не є сталими.

### 2.3 Чисельне моделювання розв'язків системи

Система (2.5) має коефіцієнт електромагнітного зв'язку, який змінюється з часом. Через це для неї складно одразу записати простий аналітичний розв'язок для функцій  $X(t)$  та  $Y(t)$ . Тому в цьому пункті ми розглянемо чисельне розв'язання цієї системи і за отриманими графіками простежимо поведінку двох основних мод. Такий підхід узгоджується з роботами, де МГД-нестійкість описують за допомогою низьковимірних моделей. Зокрема, у дисертаційній роботі Mohammad [6] поведінку моделі розглянуто через зміну її основних змінних у часі. У роботі Horstmann, Kuhn, Dohnal [1] також використовується перехід від рівнянь другого порядку до системи першого порядку з подальшим чисельним розв'язанням.

Тому для нашої системи (2.5) спочатку виконаємо такий самий технічний перехід. Для цього введемо швидкості зміни двох мод:

$$V_x = X', \quad V_y = Y' \quad (2.6)$$

Тоді система (2.5) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{X} = V_x \\ \dot{V}_x = -2\mu_x V_x - \omega_x^2 X - a(1+\beta \sin(\omega_b t))Y \\ \dot{Y} = V_y \\ \dot{V}_y = -2\mu_y V_y - \omega_y^2 Y + a(1+\beta \sin(\omega_b t))X \end{cases} \quad (2.7)$$

Отже, замість двох рівнянь другого порядку ми отримуємо чотири рівняння першого порядку. Це потрібно для чисельного інтегрування, бо програма має обчислювати не тільки самі амплітуди  $X(t)$  і  $Y(t)$ , а також швидкості їх зміни.

Для зручного запису цієї системи введемо вектор стану:

$$U(t) = (X(t), V_x(t), Y(t), V_y(t))$$

У цьому векторі перша компонента відповідає першій моді, друга — швидкості її зміни, третя — другій моді, а четверта — швидкості зміни другої моди. Тому чисельне розв'язання можна розглядати як знаходження цього вектора на заданому проміжку часу. У матрично-векторному форматі ця система зводиться до класичної початкової задачі (задачі Коші):

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = F(t, U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Функція  $F(t, U)$  містить праві частини відповідних диференціальних рівнянь. Для нашої моделі вона має такий вигляд:

$$F(t, U) = \begin{pmatrix} V_x \\ -2mu_x V_x - \omega_x^2 X - a(1 + \beta \sin(\omega_b t)) Y \\ V_y \\ -2mu_y V_y - \omega_y^2 Y + a(1 + \beta \sin(\omega_b t)) X \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Початковий вектор визначається з початкових умов для амплітуд та їхніх швидкостей:

$$U_0 = (0, 1, 0, 0.5)$$

Таким чином, у чисельному розрахунку ми не шукаємо одну явну формулу для  $X(t)$  та  $Y(t)$ . Замість цього на вибраному проміжку часу послідовно обчислюються значення вектора  $U(t)$ . Після цього з нього беремо компоненти  $X(t)$  і  $Y(t)$ , які відповідають амплітудам двох мод. Саме за цими значеннями будуються часові графіки, а пара значень  $(X(t), Y(t))$  використовується для фазової траєкторії.

Чисельне інтегрування системи виконано за допомогою функції `solve_ivp` бібліотеки `SciPy`, яка призначена для розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь.

Для розрахунку використано такі безрозмірні параметри:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 1.00, & \omega_y &= 0.92 \\ \mu_x &= 0.04, & \mu_y &= 0.07 \\ a &= 0.15, & \beta &= 0.30, & \omega_b &= 0.35 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Початкові умови задано у вигляді:

$$\begin{cases} X(0)=0, & \dot{X}(0)=1 \\ Y(0)=0, & \dot{Y}(0)=0.5 \end{cases} \quad (2.11)$$

Такі початкові умови означають, що в початковий момент відхилення обох мод дорівнюють нулю, але система має ненульові початкові швидкості. Саме ці швидкості задають початковий коливальний рух поверхні розділу. За результатами розв'язання побудуємо графіки  $X(t)$ ,  $Y(t)$  та фазову траєкторію в площині  $(X, Y)$ . Чисельний розрахунок виконано на проміжку часу:

$$0 \leq t \leq 100.$$

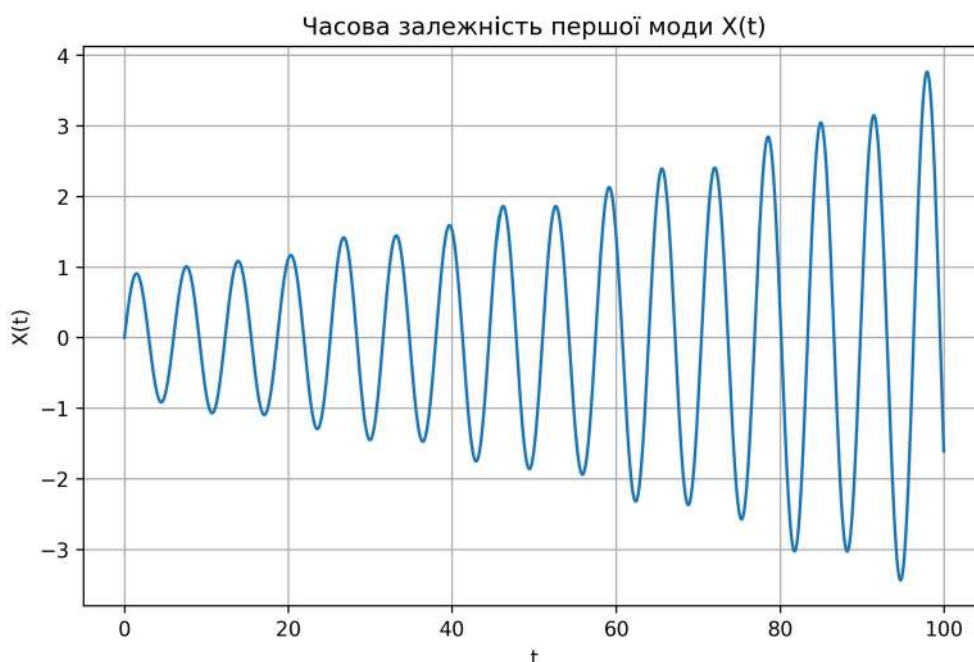


Рисунок 2.1 Часова залежність першої моди  $X(t)$

На рисунку 2.1 показано зміну амплітуди першої моди  $X(t)$  у часі. При цьому амплітуда коливань поступово збільшується, тобто перша мода не згасає в межах вибраного набору параметрів.

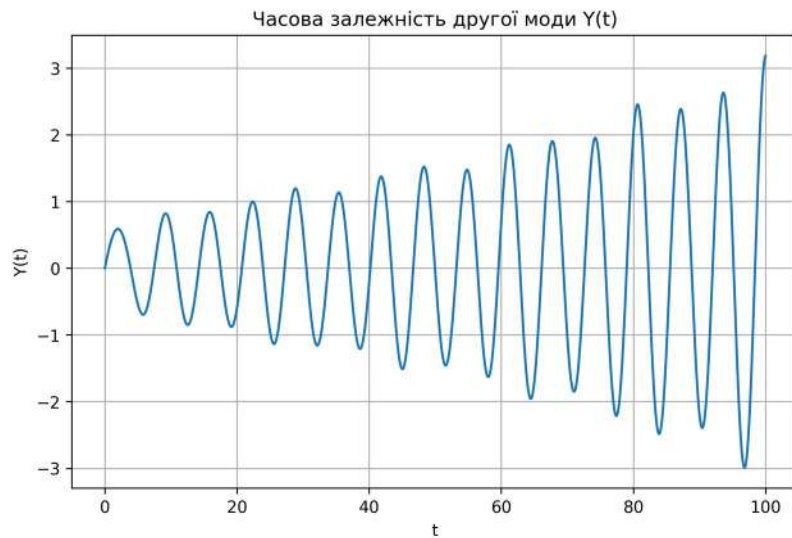


Рисунок 2.2 Часова залежність другої моди  $Y(t)$

На рисунку 2.2 наведено часову залежність другої моди  $Y(t)$ . Її поведінка також є коливальною. Зміна амплітуди  $Y(t)$  пов'язана з тим, що рівняння для другої моди містить доданок, залежний від  $X(t)$ . Отже, друга мода не розглядається окремо, а взаємодіє з першою через електромагнітний зв'язок.

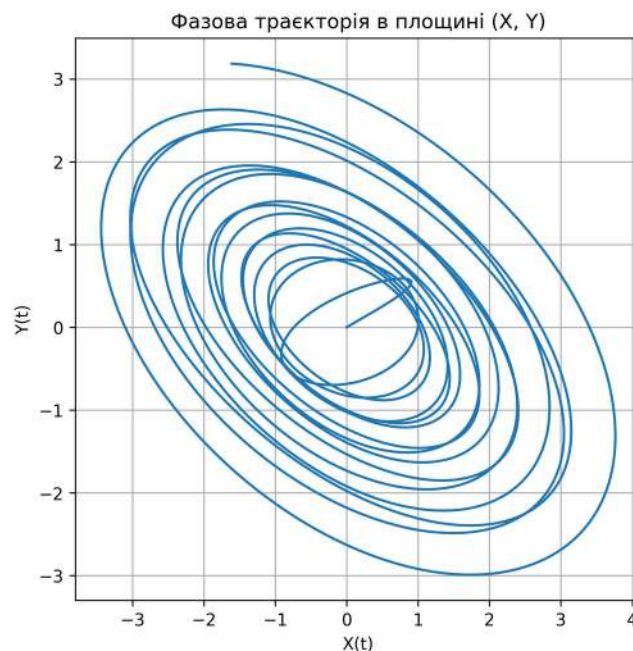


Рисунок 2.3 — Фазова траєкторія в площині  $(X, Y)$

Фазова траєкторія на рисунку 2.3 побудована за чисельними значеннями  $X(t)$  та  $Y(t)$ , отриманими з розв'язку системи (2.7). Вона показує спільну еволюцію двох мод. Оскільки фазова траєкторія у просторі станів  $(X, Y)$  не зводиться до асимптотично стійкої особливої точки і не утворює замкненої кривої, а поступово розкручується від початку координат, це свідчить про посилення сумісного руху мод. Таке безперервне експоненціальне розгойдування амплітуд у реальних магнітогідродинамічних установках призводить до критичного порушення цілісності межі розділу шарів та небажаного макроскопічного змішування рідких металів. Отже, виявлений режим прогресуючої нестійкості чітко окреслює межі безпечної експлуатації системи.

Отримані графіки потрібно розглядати не лише як формальні розв'язки системи диференціальних рівнянь. У цій моделі функції  $X(t)$  та  $Y(t)$  мають безпосередній фізичний зміст: вони задають амплітуди двох основних мод відхилення поверхні розділу між рідинами, що не змішуються. Тому зростання цих функцій у часі означає посилення деформації межі між шарами.

У базовому розрахунку, наведеному на рисунках 2.1–2.3, було розглянуто один фіксований набір параметрів. Проте система (2.5) є нестационарною, оскільки коефіцієнт електромагнітного зв'язку залежить від часу. Тому для повнішого аналізу доцільно окремо дослідити вплив параметра  $\omega_b$ , який входить до коефіцієнта

$$k(t) = a(1 + \beta \sin(\omega_b t))$$

У нашій моделі власні частоти двох основних мод мають близькі значення:

$$\omega_x = 1.00, \quad \omega_y = 0.92$$

Тому їхня сума дорівнює:

$$\omega_x + \omega_y = 1.00 + 0.92 = 1.92$$

Це значення є важливим, оскільки система описує не одну ізольовану моду, а взаємодію двох мод через електромагнітний зв'язок. Коли частота

модуляції  $\omega_b$  наближається до суми  $\omega_x + \omega_y$ , періодична зміна коефіцієнта зв'язку може узгоджуватися із сумісним рухом двох мод.

У такій області передача енергії між модами може ставати інтенсивнішою. Для поверхні розділу це означає, що відхилення межі між шарами може зростати сильніше, ніж для інших значень частоти модуляції.

Для перевірки цього ефекту було виконано додатковий розрахунок.

Система (2.5) розв'язувалася на проміжку  $0 \leq t \leq 100$  для набору значень параметра  $\omega_b$ . Для кожного значення  $\omega_b$  після чисельного інтегрування обчислювалися максимальні амплітуди двох мод:

$$\max |X(t)|, \max |Y(t)|$$

Тобто порівнювалися не окремі часові графіки, а найбільші відхилення поверхні розділу, які виникають при різних частотах модуляції. Такий підхід дозволяє визначити, за яких значень  $\omega_b$  система реагує найсильніше.

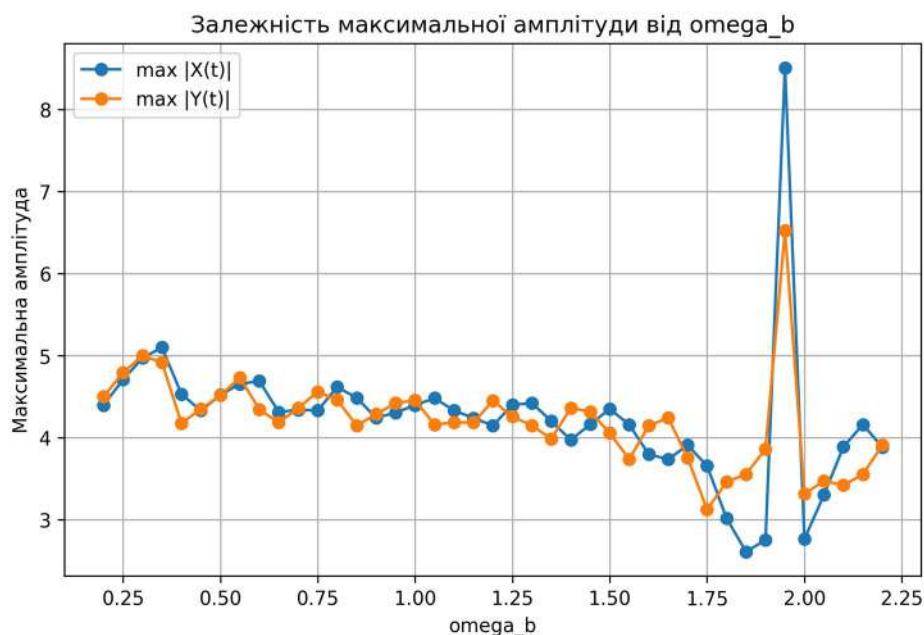


Рисунок 2.4 — Залежність максимальної амплітуди розв'язків від частоти модуляції  $\omega_b$

На рисунку 2.4 показано залежність максимальних значень  $|X(t)|$  та  $|Y(t)|$  від частоти модуляції  $\omega_b$ . Видно, що ця залежність є нерівномірною. Для більшості значень параметра максимальні амплітуди змінюються помірно, однак поблизу  $\omega_b = 1.95$  спостерігається різке збільшення амплітуди.

$$\omega_x + \omega_y = 1.00 + 0.92 = 1.92$$

Отриманий пік розташований близько до цієї комбінаційної частоти (результат можна побачити у додатках). Різниця між значеннями 1.95 та 1.92 становить приблизно 0.03, що можна пояснити кроком чисельного перебору параметра  $\omega_b$ . Отже, найбільше посилення коливань виникає саме поблизу сумарної частоти двох основних мод.

З фізичної точки зору це означає, що при таких значеннях  $\omega_b$  періодична зміна електромагнітного зв'язку сильніше впливає на спільний рух мод  $X(t)$  та  $Y(t)$ . Оскільки ці моди описують відхилення поверхні розділу між рідинами, збільшення їхніх максимальних амплітуд відповідає більш інтенсивній деформації межі між шарами. Саме це є проявом посилення міжфазної МГД-нестійкості в системі рідин, що не змішуються.

Отже, чисельне моделювання основної нестационарної системи (2.5) показало, що поведінка поверхні розділу суттєво залежить від вибору параметрів, зокрема від частоти модуляції електромагнітного зв'язку  $\omega_b$ .

Поблизу комбінаційної частоти  $\omega_x + \omega_y$  максимальні амплітуди відхилень помітно зростають, що вказує на посилення міжфазної МГД-нестійкості.

Разом з тим отримані результати є чисельними і стосуються вибраного діапазону параметрів. Вони показують характер поведінки системи, але не дають загального критерію стійкості. Тому в наступному розділі розглянемо стаціонарний випадок, коли коефіцієнт електромагнітного зв'язку не залежить від часу. Це дозволить перейти до матричної форми системи та дослідити її власні значення.

### РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ

#### 3.1 Дослідження стійкості стаціонарної лінійної системи

Для більш формального дослідження стійкості розглянемо стаціонарний випадок, коли коефіцієнт електромагнітного зв'язку не залежить від часу. Це відповідає відсутності періодичної модуляції густини основного електричного струму.

$$\begin{aligned}\beta &= 0 \\ k(t) &= a\end{aligned}\tag{3.1}$$

Тоді система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{X} + 2\mu_x \dot{X} + \omega_x^2 X = -aY \\ \ddot{Y} + 2\mu_y \dot{Y} + \omega_y^2 Y = aX \end{cases}\tag{3.2}$$

Положення рівноваги визначається умовами, що всі похідні за часом дорівнюють нулю.

$$\dot{X} = \dot{Y} = \ddot{X} = \ddot{Y} = 0\tag{3.3}$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} \omega_x^2 X = -aY \\ \omega_y^2 Y = aX \end{cases}\tag{3.4}$$

Очевидним положенням рівноваги є нульовий стан:

$$X = 0, \quad Y = 0$$

Саме стійкість цього положення рівноваги буде досліджуватися далі. Для переходу до системи першого порядку введемо нові змінні, які відповідають швидкостям зміни амплітуд:

$$V_x = \dot{X} \quad V_y = \dot{Y}\tag{3.5}$$

Для переходу від системи другого порядку (3.2) до системи першого порядку введемо змінні (3.5). Тоді отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{X} = V_x \\ \dot{V}_x = -2\mu_x V_x - \omega_x^2 X - aY \\ \dot{Y} = V_y \\ \dot{V}_y = -2\mu_y V_y - \omega_y^2 Y + aX \end{cases} \quad (3.6)$$

У матричному вигляді цю систему можна записати так:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{V}_x \\ \dot{Y} \\ \dot{V}_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_x^2 & -2\mu_x & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & -\omega_y^2 & -2\mu_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ V_x \\ Y \\ V_y \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Позначимо вектор невідомих через  $U$ , а матрицю коефіцієнтів через  $A$ :

$$U = \begin{pmatrix} X \\ V_x \\ Y \\ V_y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\dot{U} = AU$$

Поведінка системи поблизу рівноваги безпосередньо залежить від спектра матриці  $A$ . Наявність виключно від'ємних дійсних частин у її власних значень гарантує асимптотичне затухання початкових збурень:

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad (3.9)$$

Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину, то відповідне збурення зростає, і положення рівноваги є нестійким.

$$\Re(\lambda_i) > 0 \quad (3.9)$$

### 3.2 Аналіз чисельних випадків

Для чисельного дослідження стаціонарної системи використаємо безрозмірні параметри. Їх не слід розглядати як точні параметри конкретної промислової комірки. Вони вибрані для якісного аналізу впливу електромагнітного зв'язку та дисипації на стійкість рівноважного стану. У літературі низьковимірна модель МГД-нестійкості використовується як спрощений аналог руху хвиль на межі розділу. Такий підхід дозволяє замінити складну просторову задачу системою для кількох основних мод коливань.

У нашому випадку розглядаються дві моди  $X(t)$  та  $Y(t)$ , тому після переходу до системи першого порядку отримується матриця розміру 4 на 4.

У роботі Mohammad I., Kelley D. H. описано низьковимірну механічну модель, де рух у двох напрямках пов'язується електромагнітними силами, а також пояснено, що така модель використовується для якісного дослідження МГД-нестійкості[3].

У роботі Horstmann G. M., Kuhn D., Dohnal T. також підкреслено, що спрощена модель має дві степені свободи і зводиться до двох зв'язаних рівнянь другого порядку[1].

Параметри:

$$\begin{aligned}\omega_x &= 1.00, & \omega_y &= 0.92 \\ \mu_x &= 0.04, & \mu_y &= 0.07\end{aligned}\tag{3.10}$$

Такі значення відповідають випадку, коли власні частоти мод є близькими, але не збігаються повністю. Це важливо, оскільки саме взаємодія близьких за частотою мод може приводити до обміну енергією між напрямками коливань.

Для наочного аналізу отриманих результатів надалі будемо будувати фазові проєкції розв'язків. Після переходу до системи першого порядку модель містить чотири змінні:  $X$ ,  $V_x$ ,  $Y$ ,  $V_y$ . Тому повний фазовий простір є чотиривимірним, і його неможливо безпосередньо зобразити на площині. У зв'язку з цим будемо розглядати двовимірні проєкції фазових траєкторій. Змінні  $X(t)$  та  $Y(t)$  описують амплітуди двох основних мод коливань поверхні розділу. Змінні  $V_x$  та  $V_y$ , як ми зазначили вже раніше, введено під час переходу до системи першого порядку: вони відповідають швидкостям зміни цих амплітуд.

Тому проєкція на площину  $(X, V_x)$  показує поведінку першої моди, а проєкція на площину  $(Y, V_y)$  — поведінку другої моди.

*Випадок 1.* Слабка електромагнітна взаємодія між модами:

Спочатку розглянемо випадок слабшого електромагнітного зв'язку між модами. Для наведених параметрів з формули (3.8) матриця  $A$  має вигляд,:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.00 & -0.08 & -0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.10 & 0 & -0.8464 & -0.14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0161 + 0.9754i \\ \lambda_2 &= -0.0161 - 0.9754i \\ \lambda_3 &= -0.0939 + 0.9439i \\ \lambda_4 &= -0.0939 - 0.9439i \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для наочного підтвердження отриманого результату побудуємо фазові проєкції розв'язків для даного набору параметрів. Оскільки повний фазовий простір системи є чотиривимірним, розглядаємо двовимірні проєкції на площини  $(X, V_x)$  та  $(Y, V_y)$ .

На рисунку наведено дві фазові проєкції: на площину  $(X, V_x)$ , що характеризує поведінку першої моди, і на площину  $(Y, V_y)$ , що характеризує поведінку другої моди. Точки початку траєкторій задають початкові умови, а самі траєкторії показують подальшу еволюцію системи в часі.

Випадок 1. Слабкий електромагнітний зв'язок

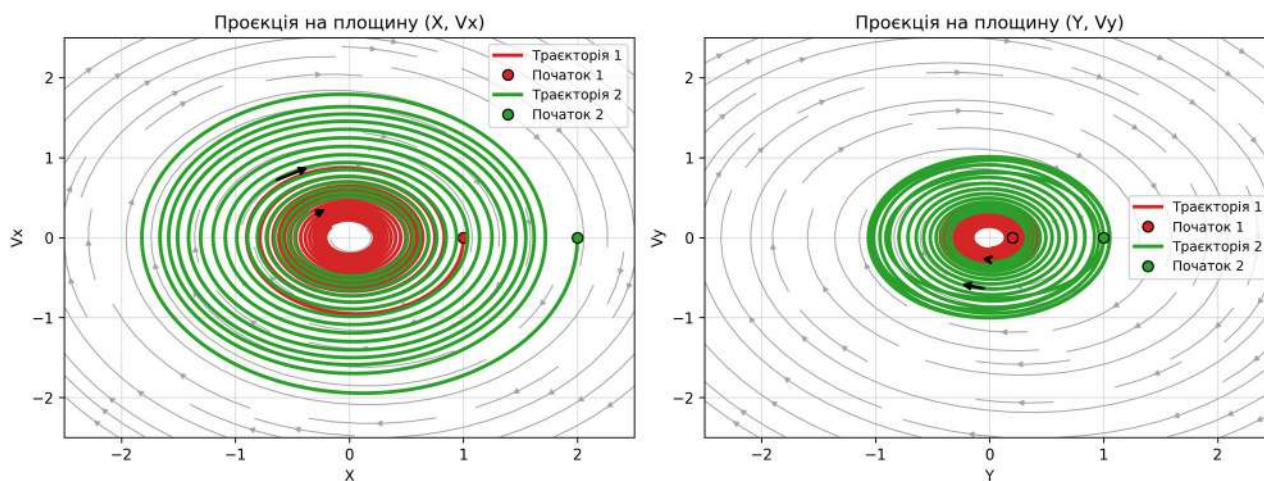


Рисунок 3.1

В обох проєкціях траєкторії з часом наближаються до положення рівноваги, тобто закручуються всередину. Це узгоджується з отриманими власними значеннями (3.11) матриці  $A$ , дійсні частини яких є від'ємними.

$$\Re(\lambda_i) < 0, \quad i=1,2,3,4$$

### Випадок 2. Посилення електромагнітна взаємодія між модами

Далі збільшимо лише коефіцієнт електромагнітного зв'язку між модами, залишаючи власні частоти та коефіцієнти дисипації без змін. Це дає змогу перевірити, як посилення електромагнітної взаємодії впливає на стійкість рівноважного стану.

$$a=0.20$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.00 & -0.08 & -0.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.20 & 0 & -0.8464 & -0.14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.0418 + 0.9702i$$

$$\lambda_2 = 0.0418 - 0.9702i$$

$$\lambda_3 = -0.1518 + 0.9576i$$

$$\lambda_4 = -0.1518 - 0.9576i$$

Випадок 2. Посилений електромагнітний зв'язок

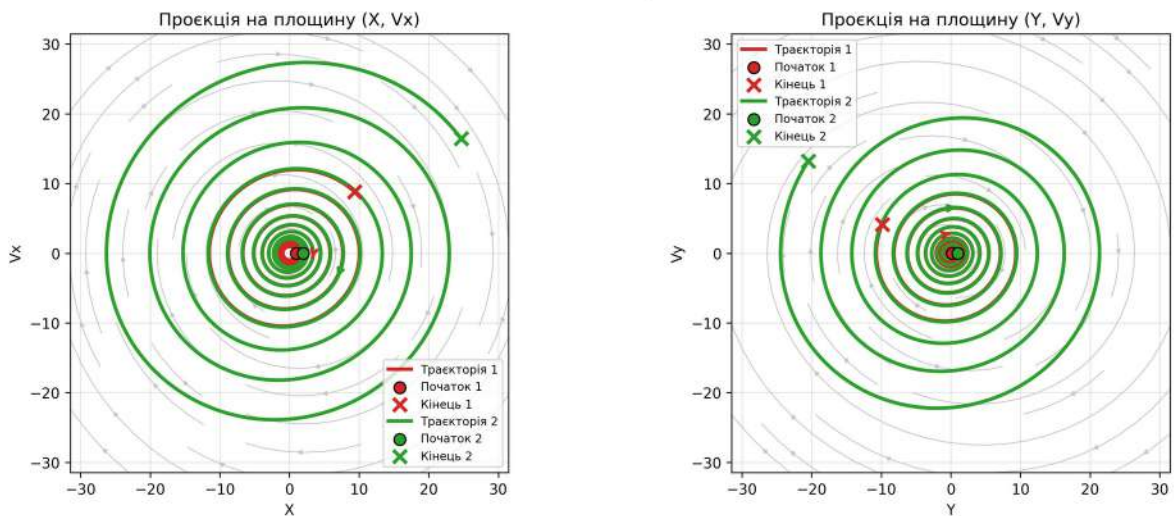


Рисунок 3.2

На фазових проєкціях видно, що після посилення електромагнітного зв'язку характер руху змінюється порівняно з першим випадком. Траєкторії вже не демонструють стійкого наближення до положення рівноваги.

Це свідчить про те, що електромагнітна взаємодія між модами стає достатньо сильною для розвитку нестійкого режиму. Це відповідає ситуації, коли електромагнітний зв'язок між модами стає достатньо сильним, щоб переважити дисипативне згасання.

$$\Re(\lambda_1) > 0, \quad \Re(\lambda_2) > 0$$

*Випадок 3.* Посилена дисипація в системі

У третьому випадку залишимо коефіцієнт електромагнітного зв'язку таким самим, як у попередньому нестійкому випадку, але збільшимо коефіцієнти дисипації. Це дає змогу перевірити, чи може посилене згасання компенсувати дію електромагнітного зв'язку і стабілізувати систему.

$$a = 0.20$$

$$\mu_x = 0.18, \quad \mu_y = 0.22$$

$$\omega_x = 1.00, \quad \omega_y = 0.92$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.00 & -0.36 & -0.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.20 & 0 & -0.8464 & -0.44 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.1016 + 0.9536i$$

$$\lambda_2 = -0.1016 - 0.9536i$$

$$\lambda_3 = -0.2984 + 0.9353i$$

$$\lambda_4 = -0.2984 - 0.9353i$$

Випадок 3. Збільшена дисипація

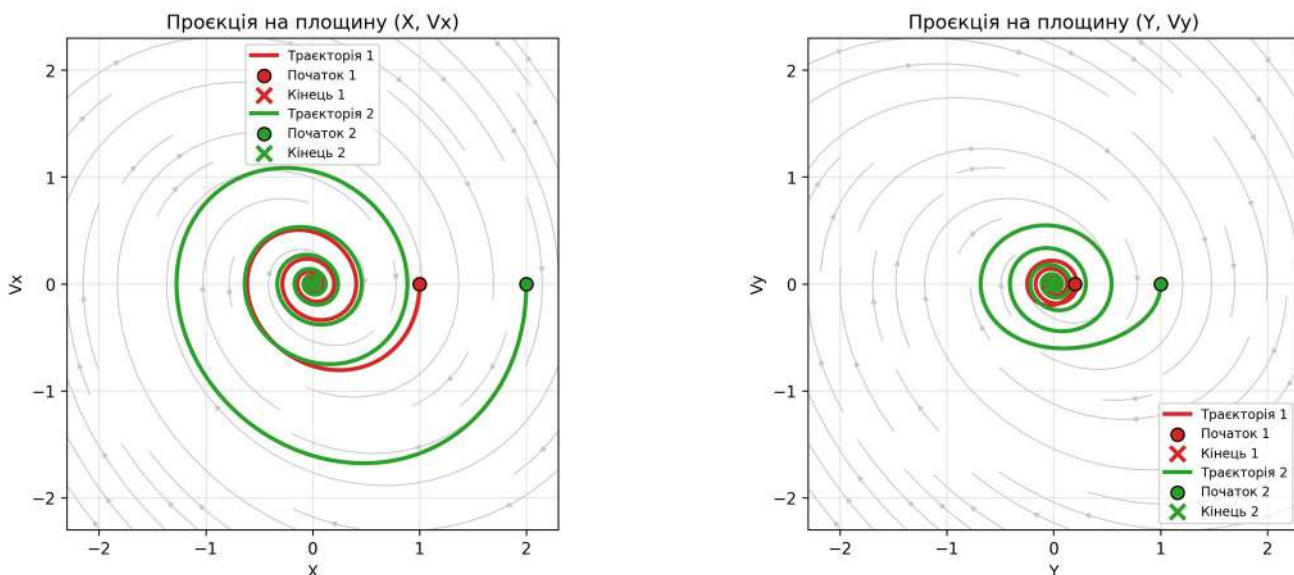


Рисунок 3.3

На фазових проекціях видно, що траєкторії з часом наближаються до положення рівноваги.

На відміну від другого випадку, посилений електромагнітний зв'язок вже не приводить до зросту збурень, оскільки збільшені коефіцієнти дисипації забезпечують сильніше згасання коливань.

$$\Re(\lambda_i) < 0, \quad i=1,2,3,4$$

Отже, розглянуті три випадки показують, що стійкість системи визначається співвідношенням між електромагнітним зв'язком і дисипативним згасанням. У першому випадку електромагнітний зв'язок є слабким, тому дисипація переважає, а фазові траєкторії наближаються до положення рівноваги. У другому випадку збільшення коефіцієнта електромагнітного зв'язку приводить до появи власних значень з додатною дійсною частиною, тому збурення починає зростати і система переходить у нестійкий режим.

Третій випадок показує, що нестійкість можна послабити збільшенням дисипативних коефіцієнтів. Незважаючи на посилений електромагнітний зв'язок, більші значення коефіцієнтів згасання повертають систему до стійкого режиму. Таким чином, у межах побудованої моделі розвиток нестійкості залежить не лише від сили електромагнітної взаємодії між модами, а й від здатності системи розсіювати енергію коливань.

## Висновки

У кваліфікаційній роботі побудовано скінченновимірну модель МГД-нестійкості у системі рідин, що не змішуються.

Розглянуто двошарову систему електропровідних рідин із поверхнею розділу, на яку впливають електричний струм, магнітне поле та сила Лоренца. Показано, що деформація поверхні розділу приводить до перерозподілу густини електричного струму, що є одним із механізмів розвитку МГД-нестійкості.

Для опису руху поверхні розділу використано двомодовий підхід. Відхилення межі між рідинами подано через дві основні моди з амплітудами  $X(t)$  та  $Y(t)$ . На основі цього отримано систему диференціальних рівнянь, яка враховує власні частоти мод, електромагнітний зв'язок, в'язке згасання та періодичну зміну коефіцієнта зв'язку.

Для основної нестационарної системи виконано чисельне інтегрування. Побудовано часові залежності  $X(t)$ ,  $Y(t)$  та фазову траєкторію. Отримані графіки показали розвиток коливань поверхні розділу та зростання амплітуд для вибраного набору параметрів.

Додатково досліджено вплив частоти модуляції електромагнітного зв'язку  $\omega_b$  на максимальні амплітуди розв'язків. Встановлено, що найбільше зростання амплітуд відбувається поблизу значення  $\omega_b = 1.95$ , яке близьке до комбінаційної частоти двох мод  $\omega_x + \omega_y = 1.92$ .

Для стаціонарного випадку систему зведено до матричної форми та досліджено її стійкість за власними значеннями. Встановлено, що слабший електромагнітний зв'язок відповідає стійкому режиму, збільшення коефіцієнта зв'язку може приводити до втрати стійкості, а збільшення коефіцієнтів згасання сприяє стабілізації системи.

Отже, у роботі показано, що побудована двомодова скінченновимірна модель дозволяє описати основні риси МГД-нестійкості поверхні розділу між рідинами, що не змішуються, та простежити вплив електромагнітного зв'язку, дисипації і частоти модуляції на розвиток міжфазних коливань.

### Список використаних джерел

1. Horstmann G. M., Kuhn D., Dohnal T. Suppression of magnetohydrodynamic interfacial wave instabilities by means of parametric anti-resonance // *Nonlinear Dynamics*. 2025. Vol. 113. P. 14449–14469. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-025-10941-7>
2. Fluid mechanics of Na-Zn liquid metal batteries / C. Duczek, G. M. Horstmann, W. Ding [et al.]// *Applied Physics Reviews*. 2024. Vol. 11. Article 041326.  
DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0225593>
3. Mohammad I., Kelley D. H. Stabilizing a Low-Dimensional Model of Magnetohydrodynamic Instabilities in Aluminum Electrolysis Cells\*\*.\*\* Light Metals 2022 / ed. D. Eskin. Cham : Springer International Publishing, 2022. P. 512–519.
4. Davidson P. A. An Introduction to Magnetohydrodynamics. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. 431 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626333>
5. Herreman W., Nore C., Guermond J.-L., Cappanera L., Weber N., Horstmann G. M. Perturbation theory for metal pad roll instability in cylindrical reduction cells. *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 878. P. 598–646. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.642>
6. Mohammad I. On Stabilizing Aluminium Electrolysis Cells with Oscillating Currents : dissertation. Rochester: University of Rochester, 2023. 136 p. URL: <https://hajim.rochester.edu/me/sites/kelley/papers/MohammadDissertation.pdf>

## ДОДАТКИ

Лістинг Програма для побудови залежності максимальної амплітуди від частоти модуляції  $\omega_b$

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4
5 # Параметри моделі
6 omega_x = 1.00
7 omega_y = 0.92
8
9 mu_x = 0.05
10 mu_y = 0.05
11
12 a = 0.15
13 beta = 0.60
14
15 # Початкові умови: U = [X, Vx, Y, Vy]
16 U0 = [0.0, 1.0, 0.0, 0.5]
17
18 # Часовий проміжок
19 t_start = 0
20 t_end = 100
21 t_eval = np.linspace(t_start, t_end, 3000)
22
23 def system(t, U, omega_b):
24     X, Vx, Y, Vy = U
25
26     k = a * (1 + beta * np.sin(omega_b * t))
27
28     dXdt = Vx
29     dVxdt = -2 * mu_x * Vx - omega_x**2 * X - k * Y
30
31     dYdt = Vy
32     dVydt = -2 * mu_y * Vy - omega_y**2 * Y + k * X
33
34     return [dXdt, dVxdt, dYdt, dVydt]
35
36 # Діапазон значень omega_b
37 omega_b_values = np.linspace(0.2, 2.2, 41)
```

```

39 max_X = []
40 max_Y = []
41
42 # Чисельний розрахунок для кожного omega_b
43 for omega_b in omega_b_values:
44     sol = solve_ivp(
45         system,
46         (t_start, t_end),
47         U0,
48         t_eval=t_eval,
49         args=(omega_b,)
50     )
51
52     X = sol.y[0]
53     Y = sol.y[2]
54
55     max_X.append(np.max(np.abs(X)))
56     max_Y.append(np.max(np.abs(Y)))
57
58 # Графік залежності максимальної амплітуди від omega_b
59 plt.figure(figsize=(8, 5))
60 plt.plot(omega_b_values, max_X, marker="o", label="max |X(t)|")
61 plt.plot(omega_b_values, max_Y, marker="o", label="max |Y(t)|")
62
63 plt.xlabel("omega_b")
64 plt.ylabel("Максимальна амплітуда")
65 plt.title("Залежність максимальної амплітуди від omega_b")
66 plt.grid(True)
67 plt.legend()
68 plt.savefig("max_amplitude_omega_b.png", dpi=300, bbox_inches="tight")
69 plt.show()
70
71 # Числовий вивід
72 for i in range(len(omega_b_values)):
73     print(
74         "omega_b =",
75         round(omega_b_values[i], 2),

```

```

71     # Числовий вивід
72     for i in range(len(omega_b_values)):
73         print(
74             "omega_b =",
75             round(omega_b_values[i], 2),
76             "max |X| =",
77             round(max_X[i], 4),
78             "max |Y| =",
79             round(max_Y[i], 4)
80         )

```

```

omega_b = 0.2 max |X| = 4.3957 max |Y| = 4.4984
omega_b = 0.25 max |X| = 4.7066 max |Y| = 4.7901
omega_b = 0.3 max |X| = 4.9701 max |Y| = 4.998
omega_b = 0.35 max |X| = 5.0984 max |Y| = 4.915
omega_b = 0.4 max |X| = 4.5303 max |Y| = 4.1762
omega_b = 0.45 max |X| = 4.3291 max |Y| = 4.3478
omega_b = 0.5 max |X| = 4.5206 max |Y| = 4.5157
omega_b = 0.55 max |X| = 4.6537 max |Y| = 4.7308
omega_b = 0.6 max |X| = 4.6891 max |Y| = 4.3435
omega_b = 0.65 max |X| = 4.3112 max |Y| = 4.1839
omega_b = 0.7 max |X| = 4.3398 max |Y| = 4.3623
omega_b = 0.75 max |X| = 4.3304 max |Y| = 4.5589
omega_b = 0.8 max |X| = 4.6171 max |Y| = 4.4582
omega_b = 0.85 max |X| = 4.4838 max |Y| = 4.1477
omega_b = 0.9 max |X| = 4.2421 max |Y| = 4.2848
omega_b = 0.95 max |X| = 4.304 max |Y| = 4.4199
omega_b = 1.0 max |X| = 4.3955 max |Y| = 4.4559
omega_b = 1.05 max |X| = 4.4813 max |Y| = 4.1582
omega_b = 1.1 max |X| = 4.3303 max |Y| = 4.1848
omega_b = 1.15 max |X| = 4.2389 max |Y| = 4.1853
omega_b = 1.2 max |X| = 4.1465 max |Y| = 4.4493
omega_b = 1.25 max |X| = 4.4 max |Y| = 4.2566
omega_b = 1.3 max |X| = 4.4199 max |Y| = 4.1472
omega_b = 1.35 max |X| = 4.2008 max |Y| = 3.9843
omega_b = 1.4 max |X| = 3.9716 max |Y| = 4.3621
omega_b = 1.45 max |X| = 4.1633 max |Y| = 4.3153
omega_b = 1.5 max |X| = 4.3489 max |Y| = 4.054
omega_b = 1.55 max |X| = 4.1583 max |Y| = 3.7373
omega_b = 1.6 max |X| = 3.7974 max |Y| = 4.1439
omega_b = 1.65 max |X| = 3.7351 max |Y| = 4.2412
omega_b = 1.7 max |X| = 3.9083 max |Y| = 3.7544
omega_b = 1.75 max |X| = 3.6553 max |Y| = 3.1232
omega_b = 1.8 max |X| = 3.0167 max |Y| = 3.4601
omega_b = 1.85 max |X| = 2.6097 max |Y| = 3.5537
omega_b = 1.9 max |X| = 2.7527 max |Y| = 3.8624
omega_b = 1.95 max |X| = 8.5056 max |Y| = 6.5231
omega_b = 2.0 max |X| = 2.7654 max |Y| = 3.3152
omega_b = 2.05 max |X| = 3.302 max |Y| = 3.472
omega_b = 2.1 max |X| = 3.8877 max |Y| = 3.4207
omega_b = 2.15 max |X| = 4.1602 max |Y| = 3.5521
omega_b = 2.2 max |X| = 3.8838 max |Y| = 3.9088

```

Лістинг Програма для побудови фазових траєкторій та обчислення власних значень стаціонарної системи:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4
5
6 def system(t, U, omega_x, omega_y, mu_x, mu_y, a):
7     X, Vx, Y, Vy = U
8
9     dxdt = Vx
10    dvxdt = -2 * mu_x * Vx - omega_x**2 * X - a * Y
11
12    dYdt = Vy
13    dvydt = -2 * mu_y * Vy - omega_y**2 * Y + a * X
14
15    return [dxdt, dvxdt, dYdt, dvydt]
16
17
18 def solve_case(case, initial_conditions):
19    t_eval = np.linspace(0, case["t_end"], 2500)
20    solutions = []
21
22    for U0 in initial_conditions:
23        sol = solve_ivp(
24            system,
25            (0, case["t_end"]),
26            U0,
27            t_eval=t_eval,
28            args=(case["omega_x"], case["omega_y"],
29                case["mu_x"], case["mu_y"], case["a"])
30        )
31        solutions.append(sol)
32
33    return solutions
34
35
36 def matrix_A(case):
37    return np.array([

```

```

38     [0, 1, 0, 0],
39     [-case["omega_x"]**2, -2 * case["mu_x"], -case["a"], 0],
40     [0, 0, 0, 1],
41     [case["a"], 0, -case["omega_y"]**2, -2 * case["mu_y"]]
42 ]
43
44
45 def add_arrow(ax, x, y, color):
46     i = int(len(x) * 0.55)
47
48     ax.annotate(
49         "",
50         xy=(x[i + 10], y[i + 10]),
51         xytext=(x[i], y[i]),
52         arrowprops=dict(arrowstyle="->", color=color, linewidth=2)
53     )
54
55
56 def plot_phase(case, initial_conditions):
57     solutions = solve_case(case, initial_conditions)
58
59     max_value = 0
60     for sol in solutions:
61         max_value = max(max_value, np.max(np.abs(sol.y)))
62
63     limit = max(1.5, 1.15 * max_value)
64
65     x_grid, vx_grid = np.meshgrid(
66         np.linspace(-limit, limit, 20),
67         np.linspace(-limit, limit, 20)
68     )
69
70     y_grid, vy_grid = np.meshgrid(
71         np.linspace(-limit, limit, 20),
72         np.linspace(-limit, limit, 20)
73     )
74
75     dx_grid = vx_grid
76     dvx_grid = -2 * case["mu_x"] * vx_grid - case["omega_x"]**2 * x_grid
77
78     dy_grid = vy_grid
79     dvy_grid = -2 * case["mu_y"] * vy_grid - case["omega_y"]**2 * y_grid
80
81     fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(13, 5.5))
82     colors = ["tab:red", "tab:green"]
83
84     for ax, grid1, grid2, d1, d2, p1, p2, labels in [
85         (axes[0], x_grid, vx_grid, dx_grid, dvx_grid, 0, 1, ("x", "vx")),
86         (axes[1], y_grid, vy_grid, dy_grid, dvy_grid, 2, 3, ("y", "vy"))
87     ]:
88         ax.streamplot(
89             grid1, grid2, d1, d2,
90             density=0.55,
91             color="0.78",
92             linewidth=0.7,
93             arrowsize=0.7
94         )
95
96     for i, sol in enumerate(solutions):
97         x = sol.y[p1]
98         y = sol.y[p2]
99
100        ax.plot(x, y, color=colors[i], linewidth=2.5,
101              label=f"Траєкторія {i + 1}")
102
103        ax.scatter(x[0], y[0], s=65, color=colors[i],
104                edgecolor="black", zorder=5,
105                label=f"Початок {i + 1}")
106
107        ax.scatter(x[-1], y[-1], s=85, color=colors[i],
108                marker="x", linewidth=2.5, zorder=6,
109                label=f"Кінець {i + 1}")
110

```

```

113     ax.set_xlabel(labels[0])
114     ax.set_ylabel(labels[1])
115     ax.set_xlim(-limit, limit)
116     ax.set_ylim(-limit, limit)
117     ax.set_aspect("equal", adjustable="box")
118     ax.grid(True, alpha=0.3)
119     ax.legend(fontsize=8)
120
121     axes[0].set_title("Проекція на площину (X, Vx)")
122     axes[1].set_title("проекція на площину (Y, Vy)")
123
124     fig.suptitle(case["title"], fontsize=14)
125     plt.tight_layout()
126     plt.savefig(case["file"], dpi=300, bbox_inches="tight")
127     plt.show()
128
129
130     initial_conditions = [
131         [1.0, 0.0, 0.2, 0.0],
132         [2.0, 0.0, 1.0, 0.0]
133     ]
134
135
136     cases = [
137         {
138             "title": "Випадок 1. Слабкий електромагнітний зв'язок",
139             "omega_x": 1.00,
140             "omega_y": 0.92,
141             "mu_x": 0.04,
142             "mu_y": 0.07,
143             "a": 0.10,
144             "t_end": 100,
145             "file": "phase_case_1.png"
146         },
147         {
148             "title": "Випадок 2. Посилений електромагнітний зв'язок",
149
150             "title": "Випадок 2. Посилений електромагнітний зв'язок",
151             "omega_x": 1.00,
152             "omega_y": 0.92,
153             "mu_x": 0.04,
154             "mu_y": 0.07,
155             "a": 0.20,
156             "t_end": 70,
157             "file": "phase_case_2.png"
158         },
159         {
160             "title": "Випадок 3. Збільшена дисипація",
161             "omega_x": 1.00,
162             "omega_y": 0.92,
163             "mu_x": 0.18,
164             "mu_y": 0.22,
165             "a": 0.20,
166             "t_end": 70,
167             "file": "phase_case_3.png"
168         }
169     ]
170
171     for case in cases:
172         A = matrix_A(case)
173         eigenvalues = np.linalg.eigvals(A)
174
175         print("\n" + case["title"])
176         print("Матриця A:")
177         print(A)
178         print("Власні значення:")
179         print(eigenvalues)
180
181         plot_phase(case, initial_conditions)

```

Лістинг Програма для чисельного моделювання нестационарної системи:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4
5 # Параметри системи
6 omega_x = 1.00
7 omega_y = 0.92
8 mu_x = 0.04
9 mu_y = 0.07
10 a = 0.15
11 beta = 0.30
12 omega_b = 0.35
13
14 # Початкові умови
15 X0 = 0.0
16 Vx0 = 1.0
17 Y0 = 0.0
18 Vy0 = 0.5
19
20 U0 = [X0, Vx0, Y0, Vy0]
21
22 # Система першого порядку
23 def system(t, U):
24     X, Vx, Y, Vy = U
25
26     k = a * (1 + beta * np.sin(omega_b * t))
27
28     dxdt = Vx
29     dvxdt = -2 * mu_x * Vx - omega_x**2 * X - k * Y
30
31     dydt = Vy
32     dvydt = -2 * mu_y * Vy - omega_y**2 * Y + k * X
33
34     return [dxdt, dvxdt, dydt, dvydt]
35
36 # Чисельне інтегрування системи
37 t_start = 0
38 t_end = 100
39 t_values = np.linspace(t_start, t_end, 3000)
40
41 solution = solve_ivp(
42     system,
43     (t_start, t_end),
44     U0,
45     t_eval=t_values
46 )
47
48 t = solution.t
49 X = solution.y[0]
50 Y = solution.y[2]
51
52 print("Параметри розрахунку:")
53 print("omega_x =", omega_x, "omega_y =", omega_y)
54 print("mu_x =", mu_x, "mu_y =", mu_y)
55 print("a =", a, "beta =", beta, "omega_b =", omega_b)
56
57 print("\nПочаткові умови:")
58 print("X(0) =", X0, "Vx(0) =", Vx0)
59 print("Y(0) =", Y0, "Vy(0) =", Vy0)
60
61 print("\nКінцеві значення розв'язку:")
62 print("X(100) =", X[-1])
63 print("Y(100) =", Y[-1])
64
65 # Графік X(t)
66 plt.figure(figsize=(8, 5))
67 plt.plot(t, X)
68 plt.xlabel("t")
69 plt.ylabel("X(t)")
70 plt.title("Часова залежність першої моди X(t)")
71 plt.grid(True)
72 plt.savefig("X_t.png", dpi=300, bbox_inches="tight")
73 plt.show()

```

```
75 # Графік  $Y(t)$ 
76 plt.figure(figsize=(8, 5))
77 plt.plot(t, Y)
78 plt.xlabel("t")
79 plt.ylabel("Y(t)")
80 plt.title("Часова залежність другої моди  $Y(t)$ ")
81 plt.grid(True)
82 plt.savefig("Y_t.png", dpi=300, bbox_inches="tight")
83 plt.show()
84
85 # Фазова траєкторія
86 plt.figure(figsize=(6, 6))
87 plt.plot(X, Y)
88 plt.xlabel("X(t)")
89 plt.ylabel("Y(t)")
90 plt.title("Фазова траєкторія в площині (X, Y)")
91 plt.grid(True)
92 plt.savefig("phase_XY.png", dpi=300, bbox_inches="tight")
93 plt.show()
```