

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

До захисту допущено

кафедрою прикладної математики, протокол № 5 від 12 червня 2026 р.

завідувач кафедри

прикладної математики

доктор фіз.-мат. наук, професор

Валерій КОРОБОВ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

здобувача першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

«Розв’язання задачі швидкодії

для одного класу нелінійних керованих систем»

Спеціальність 113 Прикладна математика

Освітня програма Прикладна математика

Здобувач

Дар’я ДУДА

Науковий керівник

доктор фіз.-мат. наук, доцент,

професор кафедри прикладної математики

Світлана ІГНАТОВИЧ

Харків – 2026

Анотація

Дана робота присвячена дослідженню нелінійної задачі швидкодії для одного класу двовимірних керованих систем, який є узагальненням системи, що описує площину Грушина. Мета роботи – отримати розв’язок цієї задачі швидкодії, якщо початкова точка дорівнює нулю, а кінцева – фіксована.

У роботі були отримані необхідні умови оптимальності на основі принципу максимуму Понтрягіна. Зокрема, було показано, що оптимальні керування є неперервно-диференційовними. Показано, що з міркувань симетрії достатньо обмежитися першим квадрантом площини без втрати загальності.

Оптимальні траєкторії можуть мати точки повороту, які утворюють певну криву. У роботі отримано рівняння цієї кривої та відповідний момент часу повороту в явному вигляді з застосуванням бета-функції. Показано, що задача Коші для визначення оптимальних траєкторій містить числовий параметр, і наведений метод знаходження цього параметра за заданою кінцевою точкою. Таким чином, в роботі вперше отриманий повний розв’язок задачі швидкодії для розглянутого класу систем.

Теоретичні результати підкріплені чисельним моделюванням та програмною реалізацією в середовищі Python.

Ключові слова: нелінійна керована система, узагальнена площина Грушина, задача швидкодії, принцип максимуму Понтрягіна, бета-функція.

Abstract

Daria Duda. Solution of the time-optimal control problem for a certain class of nonlinear control systems.

The thesis is devoted to the study of a nonlinear time-optimal control problem for a class of two-dimensional control systems that generalizes the system describing the Grushin plane. The aim of the work is to obtain a solution to this time-optimal control problem when the initial point is zero and the terminal point is fixed.

In this work, the necessary optimality conditions were obtained using Pontryagin's Maximum Principle. In particular, it was shown that the optimal controls are continuously differentiable. It is also shown that, due to symmetry considerations, it is sufficient to restrict the analysis to the first quadrant of the plane without loss of generality.

The optimal trajectories may possess turning points that form a certain curve. In this work, an explicit equation of this curve and the corresponding turning time were obtained using the beta function. It is shown that the Cauchy problem for determining the optimal trajectories contains a numerical parameter, and a method for finding this parameter for a given terminal point is presented. Thus, this work provides the first complete solution to the time-optimal control problem for the considered class of systems.

The theoretical results are supported by numerical modeling and a software implementation in Python.

Keywords: nonlinear control system, generalized Grushin plane, time-optimal control problem, Pontryagin's maximum principle, beta function.

Зміст

Вступ	5
1 Задача швидкодії для узагальненої площини Грушина	7
1.1 Застосування принципу максимуму Понтрягіна	7
1.2 Розв’язання оптимізаційної задачі	9
1.3 Властивості оптимальних керувань і оптимальних траєкторій . .	13
2 Знаходження оптимальних траєкторій	19
2.1 Знаходження кривої повороту γ	19
2.2 Перший випадок: кінцева точка x^0 лежить нижче кривої γ	22
2.3 Другий випадок: кінцева точка x^0 лежить вище кривої γ	25
2.4 Алгоритм побудови оптимального керування і оптимальної траєкторії	27
Висновки	30
Список використаних джерел	31
Додатки	33

Вступ

В роботі розглядається розв'язання задачі швидкодії для класу двовимірних нелінійних систем вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1^k u_2, \end{cases} \quad (0.1)$$

де $k \in \mathbb{N}$ – параметр. Такі системи є частковим випадком нелінійних керованих систем, у яких керування входить лінійно:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m X_i(x) u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $X_i(x)$ – вектор-функції, які можуть бути нелійними відносно x . Системи такого вигляду природно виникають у багатьох прикладних задачах керування. Найпростіший нетривіальний приклад таких систем – це двовимірна система з двома керуваннями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 u_2. \end{cases} \quad (0.2)$$

Зауважимо, що її можна отримати з системи (0.1) при $k = 1$. Тут $X_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Якщо розглядати траєкторії, що починаються в точках з $x_1 = 0$, то в початковий момент часу $\dot{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто незалежно від значення керування можливо рухатись лише у горизонтальному напрямку. Проте система повністю керована, тобто з кожної точки можна потрапити в будь-яку іншу за допомогою відповідного керування.

Розглянемо для системи (0.2) таку задачу оптимального керування: для заданих початкової і кінцевої точок площини знайти керування, яке переводить початкову точку в кінцеву за час $T = 1$ і мінімізує функціонал

$$\ell(u) = \int_0^1 \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt.$$

Якщо інтерпретувати цей функціонал як довжину траєкторії, що з'єднує початкову і кінцеву точку, то довжину оптимальної (найкоротшої) траєкторії можна вважати відстанню між початковою і кінцевою точками. Отже, отримуємо так

звану субріманову метрику [1, 2]; площина з такою метрикою називається площиною Грушина. Зауважимо, що замість вказаної задачі оптимального керування можна розглянути задачу оптимальної швидкодії: знайти керування, яке задовольняє обмеження

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1, \quad t \in [0, \theta],$$

і переводить початкову точку в кінцеву за мінімально можливий час θ . Зв'язок між вказаними задачами оптимального керування досліджений в роботі [3]. Виявляється, що в цій задачі оптимальні керування можна знайти в явному вигляді [4].

Система (0.2), що описує площину Грушина, допускає різні узагальнення. Зокрема, можна розглянути так звану α -площину Грушина

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = |x_1|^\alpha u_2, \end{cases}$$

де α – числовий параметр, необов'язково цілий. Цікаво також дослідити багатовимірне узагальнення α -площини Грушина. Такі узагальнення інтенсивно вивчаються останніми роками з точки зору диференціальної геометрії [5, 6, 7].

У даній роботі ми розглядаємо узагальнення системи (0.2) вигляду (0.1) при довільному натуральному k . Мета роботи – розглянути задачу швидкодії для цієї системи. Ми обмежуємось траєкторіями, які починаються в нулі. На відміну від випадку системи (0.2), оптимальне керування для (0.1) не можна виразити через елементарні функції. Але ми показуємо, що оптимальні керування і оптимальні траєкторії можна знайти з використанням спеціальної функції, а саме, бета-функції. Основний результат роботи – алгоритм розв'язання задачі швидкодії – сформульований в розділі 2.4.

Результати роботи доповідалися на XX Міжнародній науково-практичній конференції студентів та молодих вчених (5-6 травня 2026 р., Харків) [8].

1 Задача швидкодії для узагальненої площини Грушина

В роботі ми досліджуємо задачу швидкодії

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1^k u_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(\theta) = x^0, \quad u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1, \quad t \in [0; \theta], \quad \theta \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

де $k \in \mathbb{N}$ – фіксоване число. Ми вважаємо, що $x^0 \neq 0$. Зауважимо, що права частина системи лінійно залежить від керування. З теореми Філіпова [9] випливає, що оптимальне за швидкодією керування в цій задачі існує.

Для знаходження оптимального керування та оптимальних траєкторій будемо застосовувати принцип максимуму Понтрягіна [10].

1.1 Застосування принципу максимуму Понтрягіна

Нагадаємо формулювання принципу максимуму Понтрягіна для задачі швидкодії [10].

Теорема (Принцип максимуму Понтрягіна для задачі швидкодії). *Розглянемо задачу швидкодії*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ x(0) &= 0, \quad x(\theta) = x^0, \quad u \in \Omega, \quad \theta \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Нехай $u(t)$ – оптимальне керування, θ – оптимальний час, а $x(t)$ – оптимальна траєкторія. Визначимо функцію

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle. \quad (1.4)$$

Тоді існує ненульовий розв'язок $\psi(t)$ системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x} \Big|_{x=x(t), u=u(t)}, \quad (1.5)$$

який задовольняє умову максимуму

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in \Omega} H(\psi(t), x(t), u) \quad (1.6)$$

для майже всіх $t \in [0, \theta]$. Більш того,

$$\max_{u \in \Omega} H(\psi(t), x(t), u) = \text{const} \geq 0 \quad (1.7)$$

для всіх $t \in [0, \theta]$.

Нагадаємо, що функція (1.4) називається функцією Гамільтона-Понтрягіна, змінна ψ – спряженою змінною, а система (1.5) – спряженою системою.

Повернемось до задачі (1.1), (1.2) і побудуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$H = \psi_1 u_1 + \psi_2 x_1^k u_2. \quad (1.8)$$

Побудуємо спряжену систему. Оскільки:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -k\psi_2 x_1^{k-1} u_2, \\ -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

то отримуємо

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -k\psi_2 x_1^{k-1}(t) u_2(t), \\ \dot{\psi}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

З цього випливає, що $\psi_2 = \text{const}$.

За умовою максимуму (1.6) нам потрібно знайти максимум функції H як функції u_1, u_2 на множині $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, тобто розв'язати таку задачу

$$\max_{u_1^2 + u_2^2 \leq 1} (\psi_1(t) u_1 + \psi_2 x_1^k(t) u_2), \quad (1.10)$$

де $x_1(t)$ – перша компонента оптимальної траєкторії, а $(\psi_1(t), \psi_2)$ – ненульовий розв'язок спряженої системи (1.9). Тут t – довільне фіксоване число з відрізка $[0, \theta]$.

Перш ніж переходити до розв'язання задачі (1.10), необхідно переконатися, що функція Гамільтона-Понтрягіна вздовж оптимальної траєкторії не дорівнює нулю тотожно.

Лема 1.1. Вектор-функція $(\psi_1(t), \psi_2 x_1^k(t))$ не дорівнює нулю для будь-якого $t \in [0, \theta]$.

Доведення. Припустимо супротивне: нехай існує такий момент часу t , що $\psi_1(t) = 0$ та $\psi_2 x_1^k(t) = 0$. Тоді $\psi_2 \neq 0$. Згідно з принципом максимуму Понтрягіна, значення функції Гамільтона-Понтрягіна вздовж оптимальної траєкторії є сталою величиною $H(\psi(t), x(t), u(t)) = \text{const}$. У точці t маємо:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \psi_1(t)u_1(t) + \psi_2 x_1^k(t)u_2(t) = 0 \cdot u_1(t) + 0 \cdot u_2(t) = 0.$$

Отже, $H(\psi(t), x(t), u(t)) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, \theta]$.

Однак, якщо ми припустимо, що в якийсь момент t стан системи $x_1(t) \neq 0$, ми можемо вибрати допустиме керування $\tilde{u}_1(t) = 0$, $\tilde{u}_2(t) = \text{sign}(\psi_2 x_1^k(t))$. Тоді значення функції Гамільтона-Понтрягіна для цього керування буде:

$$H(\psi(t), x(t), \tilde{u}(t)) = 0 + \psi_2 x_1^k(t) \cdot \text{sign}(\psi_2 x_1^k(t)) = |\psi_2 x_1^k(t)| > 0.$$

Це суперечить умові максимуму, оскільки тоді має бути $H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in \Omega} H(\psi(t), x(t), u) \geq H(\psi(t), x(t), \tilde{u}(t)) > 0$. Отже, наше припущення хибне, і $(\psi_1(t), \psi_2 x_1^k(t)) \neq (0, 0)$.

Зауваження. З доведеної лєми випливає, що

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \text{const} > 0.$$

Це означає, що задача швидкодії не є виродженою.

1.2 Розв'язання оптимізаційної задачі

Повернемось до задачі (1.10). Замість задачі (1.10) будемо розв'язувати задачу з обмеженням-рівністю:

$$\max_{u_1^2 + u_2^2 = 1} (\psi_1(t)u_1 + \psi_2 x_1^k(t)u_2). \quad (1.11)$$

З лєми 1.1 випливає, що задачі (1.10) і (1.11) еквівалентні, тому що ненульова лінійна функція досягає своїх мінімального та максимального значень на межі кола.

Застосуємо метод множників Лагранжа. Нагадаємо теорему:

Теорема (Метод множників Лагранжа). Нехай $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – точка мінімуму функції $f(x)$ за умови $g(x) = 0$. Нехай градієнт функції g в точці \hat{x} не дорівнює 0, тобто $g'(\hat{x}) \neq 0$. Визначимо функцію Лагранжа

$$L(\lambda, x) = f(x) + \lambda g(x).$$

Тоді існує число $\hat{\lambda}$ (множник Лагранжа), для якого

$$\frac{\partial L(\hat{\lambda}, \hat{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Побудуємо функцію Лагранжа для нашого випадку. Нагадаємо, що $t \in [0, \theta]$ – довільне фіксоване число. Маємо:

$$L = \psi_1(t)u_1 + \psi_2 x_1^k(t)u_2 + \lambda(t)(u_1^2 + u_2^2 - 1).$$

Прирівняємо до нуля частинні L похідні по u_1 і u_2 . Отримуємо систему рівнянь відносно трьох невідомих u_1, u_2, λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_1} = \psi_1(t) + 2\lambda(t)u_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} = \psi_2 x_1^k(t) + 2\lambda(t)u_2 = 0, \\ u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Випишемо u_1 та u_2 з рівнянь:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{-\psi_1(t)}{2\lambda(t)}, \\ u_2 = \frac{-\psi_2 x_1^k(t)}{2\lambda(t)}. \end{cases}$$

Отже, за принципом максимуму Понтрягіна оптимальні керування $u_1(t)$, $u_2(t)$ (при майже всіх t) задовольняють рівності

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{-\psi_1(t)}{2\lambda(t)}, \\ u_2(t) = \frac{-\psi_2 x_1^k(t)}{2\lambda(t)}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Лема 1.2. Функція $\lambda(t)$ є константою.

Доведення. У систему (1.12) підставимо $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, отримуємо

$$\begin{cases} \psi_1(t) + 2\lambda(t)u_1(t) = 0, \\ \psi_2 x_1^k(t) + 2\lambda(t)u_2(t) = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Тепер помножимо перше рівняння на $u_2(t)$ та друге на $u_1(t)$, із цього отримаємо систему:

$$\begin{cases} \psi_1(t)u_2(t) + 2\lambda(t)u_1(t)u_2(t) = 0, \\ \psi_2 x_1^k(t)u_1(t) + 2\lambda(t)u_1(t)u_2(t) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Відніmemo у системі (1.15) друге рівняння з першого, отримуємо:

$$\psi_1(t)u_2(t) = \psi_2 x_1^k(t)u_1(t). \quad (1.16)$$

У системі (1.13) помножимо рівняння на $2\lambda(t)$:

$$\begin{cases} \psi_1(t) = -2\lambda(t)u_1(t), \\ \psi_2 x_1^k(t) = -2\lambda(t)u_2(t). \end{cases} \quad (1.17)$$

Тепер кожне із рівнянь піднесемо до квадрату та додамо їх:

$$\psi_1^2(t) + \psi_2^2 x_1^{2k}(t) = 4\lambda^2(t)(u_1^2(t) + u_2^2(t)).$$

Пам'ятаємо, що

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1. \quad (1.18)$$

Тоді отримуємо

$$\psi_1^2(t) + \psi_2^2 x_1^{2k}(t) = 4\lambda^2(t). \quad (1.19)$$

Покажемо, що $\psi_1^2(t) + \psi_2^2 x_1^{2k}(t) = \text{const}$. Для цього знайдемо похідну по t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_1^2(t) + \psi_2^2 x_1^{2k}(t)) &= 2\psi_1(t)\dot{\psi}_1(t) + \psi_2^2 \cdot 2k x_1^{2k-1}(t)\dot{x}_1(t) = \\ &= -2\psi_1(t) \cdot k x_1^{k-1}(t)\psi_2 u_2(t) + \psi_2^2 \cdot 2k x_1^{2k-1}(t)u_1(t) = \\ &= 2k\psi_2 x_1^{k-1}(t)(-\psi_1(t)u_2(t) + \psi_2 x_1^k(t)u_1(t)) = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

що випливає з (1.16). Отже, похідна функції $\psi_1^2(t) + \psi_2^2 x_1^{2k}(t)$ за часом дорівнює нулю, що означає, що функція є константою. Отже, з (1.19) випливає, що $\lambda^2(t) = \text{const}$.

Тепер покажемо, що $\lambda(t) = \text{const}$. Розглянемо задачу $\max f(v_1, v_2)$ при обмеженні типу нерівності:

$$g(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 - 1 \leq 0. \quad (1.21)$$

Згідно з необхідними умовами оптимальності, градієнт функції Лагранжа $L = f + \lambda g$ у точці екстремуму має дорівнювати нулю:

$$\nabla L = \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad \implies \quad \nabla f = -\lambda \nabla g. \quad (1.22)$$

Розглянемо орієнтацію векторів градієнтів у точці максимуму, що знаходиться на межі допустимої області ($g = 0$).

Вектор ∇g : оскільки функція обмеження задана як $g = v_1^2 + v_2^2 - 1$, її градієнт $\nabla g = (2v_1, 2v_2)^T$ є вектором зовнішньої нормалі до границі області. Він вказує у бік збільшення значення g , тобто назовні від одиничного кола.

Вектор ∇f : у точці максимуму на межі вектор градієнта цільової функції ∇f має бути спрямований назовні допустимої області. Це означає, що будь-яке подальше зростання функції f можливе лише за умови порушення обмеження $g \leq 0$.

З огляду на те, що вектори ∇f та ∇g є співнаправленими, рівність (1.22) виконується тоді і тільки тоді, коли скалярний коефіцієнт $-\lambda$ є невід'ємним:

$$\lambda \leq 0. \quad (1.23)$$

Отже, $\lambda^2(t) = \text{const}$ і $\lambda \leq 0$, з того випливає, що $\lambda(t) = \text{const}$.

Альтернативне доведення. З системи (1.13) випливає, що:

$$\begin{cases} \psi_1(t) = -2\lambda(t)u_1(t), \\ \psi_2 x_1^k(t) = -2\lambda(t)u_2(t). \end{cases} \quad (1.24)$$

Помножимо перше рівняння на $u_1(t)$, друге на $u_2(t)$, додамо їх і врахуємо, що $u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$:

$$\psi_1(t)u_1(t) + \psi_2 x_1^k(t)u_2(t) = -2\lambda(t)(u_1^2(t) + u_2^2(t)) = -2\lambda(t).$$

Тепер зауважимо, що в лівій частині цієї рівності стоїть функція Гамільтона-Понтрягіна $H(\psi(t), x(t), u(t))$, яка задовільняє умови (1.6), (1.7).

Отже, $-2\lambda(t) = \text{const} > 0$, звідки $\lambda(t) = \text{const} < 0$.

1.3 Властивості оптимальних керувань і оптимальних траєкторій

Таким чином, з системи (1.13) отримуємо, що оптимальні керування $u_1(t)$ та $u_2(t)$ – неперервно-диференційовні функції від t . Диференціюючи їх, отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \frac{kx_1^{k-1}(t)\psi_2 u_2(t)}{2\lambda}, \\ \dot{u}_2(t) = \frac{-\psi_2 kx_1^{k-1}(t)u_1(t)}{2\lambda}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Позначимо

$$c = -\frac{\psi_2}{2\lambda},$$

тоді (1.25) разом з першим рівнянням системи (1.1) можемо записати як систему трьох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -ckx_1^{k-1}u_2, \\ \dot{u}_2 = ckx_1^{k-1}u_1, \\ \dot{x}_1 = u_1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Диференціальне рівняння для x_2 має вигляд $\dot{x}_2 = x_1^k u_2$, тому ми можемо не розглядати x_2 в системі.

Приклад. Розглянемо найпростіший випадок $k = 1$. А саме, в системі (1.1) підставимо $k = 1$, тоді отримаємо таку спряжену систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2 u_2(t), \\ \dot{\psi}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

В цьому випадку права частина не містить x_1 . Більш того, і диференціальні рівняння для u_1 і u_2 не включають x_1 :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -cu_2, \\ \dot{u}_2 = cu_1. \end{cases} \quad (1.28)$$

Отже, $\ddot{u}_1 = -c^2 u_1$. З цього випливає, що

$$\begin{cases} u_1(t) = c_1 \sin(ct) - c_2 \cos(ct), \\ u_2(t) = c_1 \cos(ct) - c_2 \sin(ct) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) = \cos(ct + \mu), \\ u_2(t) = \sin(ct + \mu). \end{cases} \quad (1.29)$$

Якщо позначити $\xi(t) = ct + \mu$, то отримаємо

$$\begin{cases} u_1(t) = \cos(\xi(t)), \\ u_2(t) = \sin(\xi(t)). \end{cases} \quad (1.30)$$

У загальному випадку, коли $k \geq 2$, теж можна розглянути функцію $\xi(t)$, для якої виконуються рівності (1.30), але тепер ця функція нелінійна. Так як керування $u_1(t)$ та $u_2(t)$ неперервно-диференційовні, то функція $\xi(t)$ також неперервно-диференційовна.

Продиференціюємо перше рівняння (1.30):

$$\dot{u}_1(t) = -\sin(\xi(t))\dot{\xi}(t).$$

Оскільки з (1.26) випливає, що

$$\dot{u}_1(t) = -ckx_1^{k-1}(t)u_2(t) = -ckx_1^{k-1}(t)\sin(\xi(t)),$$

то маємо

$$-\sin(\xi(t))\dot{\xi}(t) = -ckx_1^{k-1}(t)\sin(\xi(t)).$$

Отже, якщо $\sin(\xi(t)) \neq 0$ (тобто $u_2(t) \neq 0$), то

$$\dot{\xi}(t) = ckx_1^{k-1}(t).$$

Зауважимо, що з (1.13) випливає, що $u_2(0) = 0$, отже, $u_1^2(0) = 1$. Тоді

$$\begin{cases} u_1(0) = \pm 1, \\ u_2(0) = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Оскільки рух по оптимальних траєкторіях здійснюється вправо у першому та четвертому квадрантах (якому відповідає початковий кут $\xi(0) = 0$), та вліво

у другому та третьому квадрантах (якому відповідає $\xi(0) = \pi$), то оптимальні траєкторії задаються розв'язками задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(\xi), \\ \dot{x}_2 = x_1^k \sin(\xi), \\ \dot{\xi} = ckx_1^{k-1}, \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \xi(0) = 0 \text{ або } \pi. \quad (1.32)$$

Зауважимо, що множина оптимальних за швидкодією траєкторій системи (1.32), що починаються в 0, має властивості симетрії.

Симетрія відносно осі x_2 .

Оскільки зміна знака у системі залежить від степеня k , розглянемо два випадки: коли параметр k є парним та непарним числом.

Нехай $x_1(t), x_2(t)$ — розв'язок системи (1.1) з оптимальним керуванням $u_1(t), u_2(t)$, причому

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(\theta) &= x_1^0 \geq 0, \quad x_2(\theta) = x_2^0 \geq 0, \end{aligned}$$

тобто точка x^0 лежить у I квадранті.

Нехай k парне. Розглянемо функції $\tilde{x}_1(t) = -x_1(t), \tilde{x}_2(t) = x_2(t)$ і оптимальне керування $\tilde{u}_1(t) = -u_1(t), \tilde{u}_2(t) = u_2(t)$. Маємо:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = -\dot{x}_1(t) = -u_1(t) = \tilde{u}_1(t), \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = \dot{x}_2(t) = x_1^k(t)u_2(t) = (-x_1(t))^k u_2(t) = \tilde{x}_1^k(t)\tilde{u}_2(t) \end{cases}$$

тобто $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$ — розв'язок системи (1.1) з оптимальним керуванням $\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)$, причому

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(0) &= \tilde{x}_2(0) = 0, \\ \tilde{x}_1(\theta) &= -x_1^0 \leq 0, \quad \tilde{x}_2(\theta) = x_2^0 \geq 0, \end{aligned}$$

тобто точка \tilde{x}^0 лежить у II квадранті.

Тепер нехай k непарне. Розглянемо функції $\tilde{x}_1(t) = -x_1(t), \tilde{x}_2(t) = x_2(t)$ і оптимальне керування $\tilde{u}_1(t) = -u_1(t), \tilde{u}_2(t) = -u_2(t)$. Маємо:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = -\dot{x}_1(t) = -u_1(t) = \tilde{u}_1(t), \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = \dot{x}_2(t) = x_1^k(t)u_2(t) = (-x_1(t))^k(-u_2(t)) = \tilde{x}_1^k(t)\tilde{u}_2(t), \end{cases}$$

тобто $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$ – розв’язок системи (1.1) з оптимальним керуванням $\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)$, причому

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(0) &= \tilde{x}_2(0) = 0, \\ \tilde{x}_1(\theta) &= -x_1^0 \leq 0, \quad \tilde{x}_2(\theta) = x_2^0 \geq 0,\end{aligned}$$

тобто точка \tilde{x}^0 лежить у II квадранті.

Отже, кожній траєкторії, що починається в 0 і закінчується в точці II квадранту, відповідає траєкторія, симетрична відносно вертикальної осі, яка починається в 0 і закінчується в точці I квадранту, і навпаки. Керування, що відповідають цим траєкторіям, задовольняють обмеження, а час руху — рівний. Тож якщо одна з них оптимальна, то і інша оптимальна. Це означає, що при дослідженні можна обмежитися одним з цих випадків, а розв’язок у другому випадку отримати з першого як симетричне віддзеркалення.

Симетрія відносно осі x_1 .

Відображення системи відносно горизонтальної осі описується як $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = -x_2$ і відображає I квадрант у IV квадрант.

Симетрія відносно початку координат.

Центральна симетрія відображає I квадрант у III квадрант за правилом $\tilde{x}_1 = -x_1$ та $\tilde{x}_2 = -x_2$.

В кожному з цих випадків можна навести аналогічні міркування: розглянути випадки парних і непарних k і отримати відповідні заміни оптимальних керувань.

Отже, будь-яка оптимальна траєкторія в довільному квадранті з точністю до знаків координат та керувань збігається з відповідною траєкторією з першого квадранта. Це дозволяє без втрати загальності зафіксувати $u_1(0) = 1$, $c > 0$ та проводити подальші розрахунки лише для області $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Лема 1.3. Траєкторія, яка перетинає вісь координат, не є оптимальною за швидкодією.

Доведення. Розглянемо дві траєкторії, які починаються в нулі і закінчуються в точці x^0 у другому квадранті (інші випадки розташування точки x^0

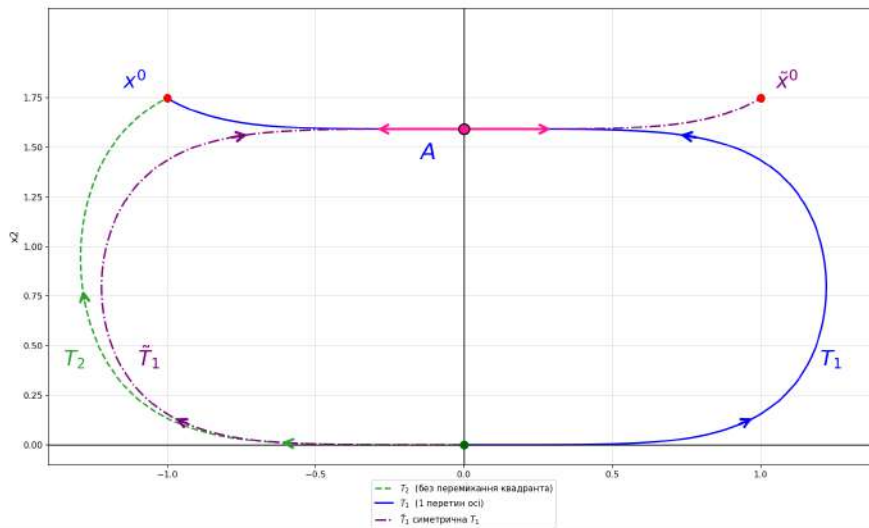


Рис. 1: Дві криві, які перетинаються в одній точці

розглядаються аналогічно). Нехай одна з них (позначимо її T_1) проходить через перший квадрант і потім виходить за його межі, перетинаючи вертикальну вісь x_2 , і потрапляє в другий квадрант. А друга (позначимо її T_2) проходить лише по другому квадранту. Нехай обидві траєкторії задовольняють систему (1.32).

На рис. 1 зображені дві такі траєкторії.

Доведемо, що траєкторія T_1 не може бути оптимальною.

Нехай траєкторія T_1 веде до точки x^0 , перетинаючи вісь ($x_1 = 0$) у точці A . Оскільки виконуються властивості симетрії, ми можемо потрапити в точку A , рухаючись по симетричній кривій \tilde{T}_1 , що далі веде до симетричної точки \tilde{x}^0 (див. рис. 1). Внаслідок симетрії траєкторій, час руху від початку координат до точки перетину A , а також час руху від точки A до відповідних кінцевих точок є рівним. Отже, загальний час руху по обох траєкторіях збігається.

Тепер розглянемо такий рух до точки \tilde{x}^0 : спочатку по траєкторії T_1 до точки A , а потім – по траєкторії \tilde{T}_1 до точки \tilde{x}^0 . Оскільки після потрапляння в точку A ми продовжуємо рух по симетричній траєкторії \tilde{T}_1 , керування u_1 в точці A змінює знак з $u_1 = -1$ на $u_1 = 1$. Але у попередньому підрозділі доведено, що оптимальні керування неперервно-диференційовні. Тобто вказана кускова траєкторія не є оптимальною, а отже, і траєкторія T_1 теж не є оптимальною.

Таким чином, траєкторії, що перетинають вісь координат, не є оптимальними

за швидкодією, що й потрібно було довести.

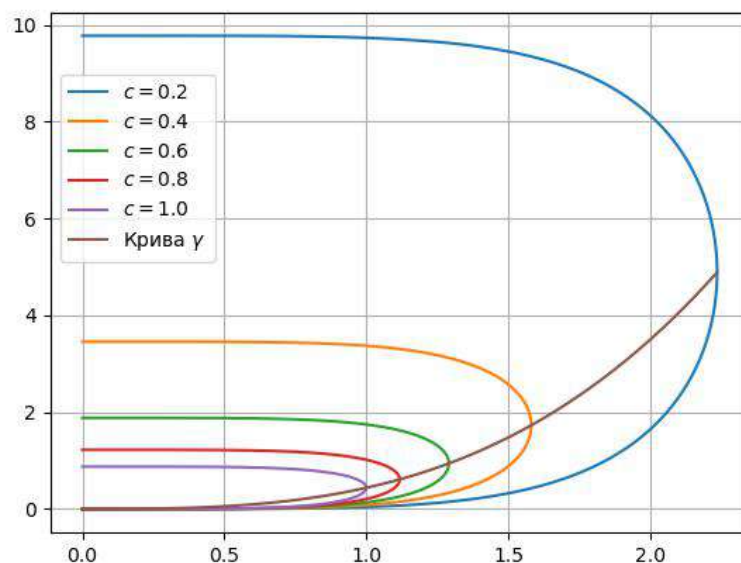


Рис. 2: Кілька оптимальних траєкторій, $k = 2$

Розглянемо сімейство траєкторій, що проходять лише по першому квадранту, при додатних значеннях c (див. рис. 2). У наступному розділі ми покажемо, що через кожну точку першого квадранта проходить рівно одна така оптимальна крива. Отже, тепер задача полягає в тому, щоб за заданими значеннями x_1^0 і x_2^0 знайти відповідне c і час руху θ .

2 Знаходження оптимальних траєкторій

Якщо кінцева точка лежить на горизонтальній осі, тобто $x_2^0 = 0$, то очевидно, що оптимальне керування дорівнює $u_1(t) = 1, u_2(t) = 0$, що відповідає значенню $c = 0$. Далі будемо розглядати лише точки, для яких $x_2^0 > 0$.

Помітимо, що по кожній траєкторії (див. рис. 2) точка рухається вправо, а потім вліво. Розглянемо «точки повороту» і знайдемо рівняння кривої, на якій вони лежать. Далі будемо позначати її γ . Ця крива показана на рис. 2.

2.1 Знаходження кривої повороту γ

Розглянемо перше і третє диференціальні рівняння системи (1.32). З них отримуємо:

$$\frac{d\xi}{dx_1} = \frac{ckx_1^{k-1}}{\cos(\xi)}. \quad (2.1)$$

Це рівняння з відокремлювальними змінними. Отже, відокремимо змінні і отримаємо

$$\cos(\xi)d\xi = ckx_1^{k-1}dx_1,$$

звідки, інтегруючи і враховуючи, що $\xi(0) = x_1(0) = 0$, отримуємо

$$\sin(\xi) = cx_1^k. \quad (2.2)$$

Зокрема, ця рівність означає, що $u_2(t) = cx_1^k(t)$.

Тепер розглянемо перше і друге диференціальні рівняння системи (1.32). З них отримуємо:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1^k \sin(\xi)}{\cos(\xi)}. \quad (2.3)$$

Оскільки до моменту повороту система рухалася вправо, то

$$u_1(t) = \cos(\xi(t)) > 0.$$

Отже, враховуючи рівність (2.2), маємо

$$\cos(\xi) = \sqrt{1 - c^2 x_1^{2k}}.$$

Таким чином, з (2.3) отримуємо

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1^{2k}}{\sqrt{1 - c^2x_1^{2k}}}. \quad (2.4)$$

Це теж рівняння з відокремлювальними змінними. Відокремимо змінні і отримаємо

$$dx_2 = \frac{cx_1^{2k}}{\sqrt{1 - c^2x_1^{2k}}} dx_1,$$

звідки маємо

$$x_2 = \int \frac{cx_1^{2k}}{\sqrt{1 - c^2x_1^{2k}}} dx_1. \quad (2.5)$$

Замінімо змінні під інтегралом. Позначимо $\tau = c^2x_1^{2k}$, тоді

$$x_1 = \frac{\tau^{\frac{1}{2k}}}{c^{\frac{1}{k}}}.$$

Отже,

$$d\tau = c^2 \cdot 2kx_1^{2k-1} dx_1 = c^2 \cdot 2k \frac{\tau^{\frac{2k-1}{2k}}}{c^{\frac{2k-1}{k}}} dx_1 = 2kc^{\frac{1}{k}} \tau^{1-\frac{1}{2k}} dx_1.$$

Тоді

$$\int \frac{cx_1^{2k}}{\sqrt{1 - c^2x_1^{2k}}} dx_1 = \frac{1}{2k c^{1+\frac{1}{k}}} \int \frac{\tau^{\frac{1}{2k}}}{\sqrt{1 - \tau}} d\tau. \quad (2.6)$$

Нас цікавить момент повороту \hat{t} , коли $u_1(\hat{t}) = \cos(\xi(\hat{t})) = 0$, тобто $c^2x_1^{2k}(\hat{t}) = 1$,

звідки $c = \frac{1}{x_1^k}$. Отже,

$$\frac{1}{c^{1+\frac{1}{k}}} = x_1^{k+1}.$$

Крім того, це означає, що інтеграл потрібно знаходити на відрізку $\tau \in [0, 1]$.

Отже, точка $x = (x_1, x_2)$ є точкою повороту, якщо

$$x_2 = \frac{x_1^{k+1}}{2k} \int_0^1 \frac{\tau^{\frac{1}{2k}}}{\sqrt{1 - \tau}} d\tau. \quad (2.7)$$

Інтеграл у правій частині (2.7) можна записати як бета-функцію. Нагадаємо означення [11, §5.12]. Бета-функцією називається функція двох комплексних змінних

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{x-1} (1 - \tau)^{y-1} d\tau, \quad \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0. \quad (2.8)$$

Бета-функцію можна виразити через гамма-функцію Ейлера за формулою:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.9)$$

Отже, рівняння (2.7) можна переписати як

$$x_2 = \frac{x_1^{k+1}}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right).$$

Приклад. Для випадку $k = 1$ вираз у правій частині можна спростити:

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, при $k = 1$ рівняння (2.7) має явний вигляд $x_2 = \frac{1}{4}\pi x_1^2$.

Таким чином, отримуємо, що точки повороту лежать на кривій γ , рівняння якої має вигляд

$$x_2 = \alpha x_1^{k+1}, \quad \text{де } \alpha = \frac{1}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right). \quad (2.10)$$

Тепер знайдемо час \hat{t} повороту, тобто час потрапляння траєкторії на криву γ . Для цього розглянемо перше рівняння з системи (1.32), яке можна записати як

$$\frac{dx_1}{dt} = \sqrt{1 - c^2 x_1^{2k}}.$$

Відокремимо змінні і отримаємо

$$dt = \frac{dx_1}{\sqrt{1 - c^2 x_1^{2k}}}.$$

Міркуючи аналогічно попередньому, отримуємо формулу для моменту повороту (яка включає c):

$$\hat{t} = \frac{B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)}{2k c^{\frac{1}{k}}}. \quad (2.11)$$

З формули (2.9) і властивості гамма-функції $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ отримуємо

$$B(1+x, y) = \frac{x}{x+1} B(x, y).$$

Отже,

$$B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2k}}{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2}} B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k+1} B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right).$$

З урахуванням (2.10), формулу (2.11) можна переписати таким чином:

$$\hat{t} = \frac{(k+1)\alpha}{c^{\frac{1}{k}}}.$$

З міркувань симетрії маємо, що час, за який траєкторія повертається на вісь $x_1 = 0$ (див. рис. 2), вдвічі більший за \hat{t} .

2.2 Перший випадок: кінцева точка x^0 лежить нижче кривої γ

Якщо точка x^0 лежить нижче γ , тобто виконується нерівність

$$x_2^0 < \alpha(x_1^0)^{k+1}, \quad \alpha = \frac{1}{2k}B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right),$$

то рух по траєкторії відбувається вправо. Це означає, що $\dot{x}_1(t)$ не змінює знак (залишається додатним), звідки випливає

$$\cos(\xi) = \sqrt{1 - c^2 x_1^{2k}}.$$

Отже, для знаходження c за заданою кінцевою точкою міркуємо аналогічно попередньому розділу і отримуємо співвідношення (2.5) і (2.6). Тільки тепер нам потрібно інтегрувати від $\tau = 0$ до $\tau = c^2(x_1^0)^{2k}$:

$$x_2^0 = \frac{1}{2k c^{1+\frac{1}{k}}} \int_0^{c^2(x_1^0)^{2k}} \frac{\tau^{\frac{1}{2k}}}{\sqrt{1-\tau}} d\tau. \quad (2.12)$$

Праву частину цієї рівності можна записати за допомогою неповної бета-функції. Вона є узагальненням бета-функції і визначається як

$$B_z(x, y) = \int_0^z \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (2.13)$$

Зауважимо, що часто замість неповної бета-функції $B_z(x, y)$ використовується регуляризована бета-функція

$$I_z = \frac{B_z(x, y)}{B(x, y)}.$$

Наприклад, саме регуляризована бета-функція реалізована в бібліотеці `scipy.special`, яку ми використовуємо для обчислень у прикладах в цій роботі.

З використанням неповної бета-функції формулу (2.12) можна переписати так:

$$x_2^0 = \frac{1}{2k c^{1+\frac{1}{k}}} B_{c^2(x_1^0)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right).$$

Тобто для визначення c маємо рівняння:

$$c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0 = \frac{1}{2k} B_{c^2(x_1^0)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right). \quad (2.14)$$

Ми шукаємо корінь цього рівняння на інтервалі $c \in (0, \frac{1}{(x_1^0)^k}]$. Розглянемо функцію

$$f(c) = \frac{1}{2k} B_{c^2(x_1^0)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) - c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0. \quad (2.15)$$

На рис. 3 наведений графік цієї функції для точки $x^0 = (1.5, 0.7)$ при $k = 2$.

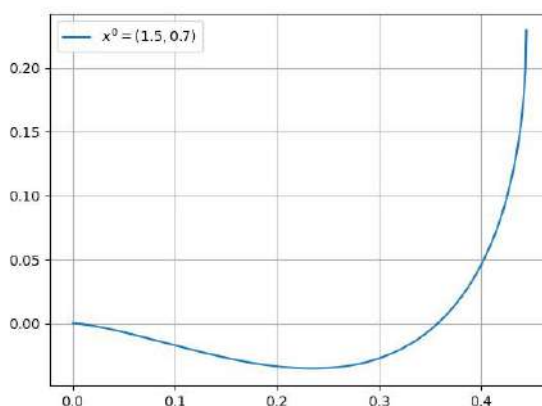


Рис. 3: Графік функції, коренем якої є c

Зауважимо, що при $c^2(x_1^0)^{2k} = 1$ неповна бета-функція переходить у повну, тобто рівняння (2.14) набуває вигляду

$$\frac{x_2^0}{(x_1^0)^{k+1}} = \frac{1}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right),$$

що означає, що точка x^0 потрапила на криву γ .

Лема 2.1. Функція (2.15) має єдиний корінь на інтервалі $(0, \frac{1}{(x_1^0)^k}]$.

Доведення. Знаємо, що у нулі функція (2.15) приймає значення нуль, але нас цікавить саме ненульовий корінь. Розглянемо значення $c = \frac{1}{(x_1^0)^k}$. Запишемо значення функції (2.15) в цій точці:

$$f\left(\frac{1}{(x_1^0)^k}\right) = \frac{1}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(x_1^0)^{k+1}} x_2^0. \quad (2.16)$$

Покажемо, що це значення додатне. За умовою, $x_2^0 < \alpha(x_1^0)^{k+1}$, тобто $\frac{x_2^0}{(x_1^0)^{k+1}} < \alpha$, де $\alpha = \frac{1}{2k}B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2})$. З цього випливає, що значення (2.16) буде додатним.

Тепер знайдемо похідну функції (2.15):

$$f'(c) = \frac{c^{\frac{1}{k}}}{k} \cdot \left(\frac{(x_1^0)^{2k+1} \cdot c}{\sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}}} - (k+1)x_2^0 \right). \quad (2.17)$$

Позначимо вираз у дужках через $g(c)$:

$$g(c) = \frac{(x_1^0)^{2k+1} \cdot c}{\sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}}} - (k+1)x_2^0.$$

Оскільки перший множник $\frac{c^{1/k}}{k} > 0$ при $c > 0$, то знак похідної $f'(c)$ визначається знаком функції $g(c)$.

Дослідимо $g(c)$ на інтервалі $c \in (0, \frac{1}{(x_1^0)^k})$:

$$g(0) = -(k+1)x_2^0 < 0 \quad (\text{оскільки } x_2^0 > 0),$$

$$g(c) \rightarrow +\infty \text{ при } c \rightarrow \frac{1}{(x_1^0)^k} \quad (\text{оскільки знаменник прямує до } 0).$$

Тобто $g(c)$ стає додатним в околі $\frac{1}{(x_1^0)^k}$.

Тепер знайдемо похідну $g'(c)$:

$$\begin{aligned} g'(c) &= (x_1^0)^{2k+1} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}} - c \cdot \frac{-2c(x_1^0)^{2k}}{2\sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}}}}{\left(\sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}}\right)^2} = \\ &= (x_1^0)^{2k+1} \cdot \frac{1 - c^2(x_1^0)^{2k} + c^2(x_1^0)^{2k}}{(1 - c^2(x_1^0)^{2k})^{\frac{3}{2}}} = \\ &= (x_1^0)^{2k+1} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}}\right)^3}. \end{aligned}$$

Тобто $g'(c) > 0$ для всіх $c \in (0, \frac{1}{(x_1^0)^k})$. Це означає, що функція $g(c)$ є зростаючою. Оскільки вона зростає від від'ємного значення до додатного, існує єдина точка \tilde{c} , у якій $g(\tilde{c}) = 0$, а отже, і $f'(\tilde{c}) = 0$.

Знайдемо цю точку, розв'язавши рівняння $g(c) = 0$:

$$\frac{(x_1^0)^{2k+1} \cdot c}{\sqrt{1 - c^2(x_1^0)^{2k}}} = (k+1)x_2^0.$$

Піднісши обидві частини до квадрата та виразивши c , отримаємо єдину точку:

$$\tilde{c} = \frac{(k+1)x_2^0}{(x_1^0)^k \sqrt{(x_1^0)^{2k+2} + (k+1)^2(x_2^0)^2}}. \quad (2.18)$$

Переконаємося, що ця точка належить нашому інтервалу. Очевидно, що $\tilde{c} > 0$. Запишемо вираз (2.18) так:

$$\tilde{c} = \frac{1}{(x_1^0)^k} \cdot \frac{(k+1)x_2^0}{\sqrt{(x_1^0)^{2k+2} + ((k+1)x_2^0)^2}}.$$

Оскільки дріб має вигляд $\frac{A}{\sqrt{B^2+A^2}}$, де $B = (x_1^0)^{k+1} > 0$, цей множник є строго меншим за 1. Звідси випливає, що:

$$0 < \tilde{c} < \frac{1}{(x_1^0)^k}.$$

Отже, існує єдиний мінімум \tilde{c} функції $f(c)$ на досліджуваному інтервалі. Функція $f(c)$ спадає на інтервалі $(0, \tilde{c})$ від значення $f(0) = 0$ до від'ємного мінімуму $f(\tilde{c}) < 0$, а потім зростає на інтервалі $(\tilde{c}, \frac{1}{(x_1^0)^k})$. Оскільки раніше ми показали, що на правому кінці інтервалу функція набуває додатного значення $f(\frac{1}{(x_1^0)^k}) > 0$, то отримуємо, що її графік обов'язково перетинає горизонтальну вісь рівно один раз на проміжку $(\tilde{c}, \frac{1}{(x_1^0)^k})$.

Це доводить, що шуканий ненульовий корінь існує і є єдиним.

Якщо значення c знайдено (як корінь рівняння (2.14)), то можна знайти оптимальний час θ руху до точки x^0 . Міркуючи аналогічно попередньому розділу, отримуємо

$$\theta = \frac{1}{2k c^{\frac{1}{k}}} B c^{2(x_1^0)^{2k}} \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right). \quad (2.19)$$

2.3 Другий випадок: кінцева точка x^0 лежить вище кривої γ .

Нехай точка x^0 лежить вище кривої γ , тобто виконується умова

$$x_2^0 > \alpha (x_1^0)^{k+1}, \quad \alpha = \frac{1}{2k} B \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right).$$

Це означає, що рух по траєкторії відбувався вправо до точки повороту, а потім – вліво до точки x^0 . Нехай x^1 – точка перетину цієї кривої і осі Ox_2 . З міркувань

симетрії x_2^1 вдвічі більше ординати точки повороту на цій кривій, тобто

$$x_2^1 = \frac{B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2})}{k c^{1+\frac{1}{k}}}.$$

А тоді, теж з міркувань симетрії, отримуємо, що точка $\tilde{x}^0 = (x_1^0, x_2^1 - x_2^0)$ теж лежить на цій кривій, але нижче γ . Застосовуючи результат попереднього підрозділу, а саме, рівняння (2.14), отримуємо рівняння для c :

$$c^{1+\frac{1}{k}} \left(\frac{B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2})}{k c^{1+\frac{1}{k}}} - x_2^0 \right) = \frac{1}{2k} B_{c^2(x_1^0)^{2k}}(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}),$$

звідки

$$c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0 = \frac{1}{2k} \left(2B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}}(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) \right). \quad (2.20)$$

Якщо $x_1^0 = 0$, тобто кінцева точка лежить на вертикальній осі, то

$$c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0 = \frac{1}{k} B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) = 2\alpha,$$

звідки

$$c = \left(\frac{2\alpha}{x_2^0} \right)^{\frac{k}{k+1}}.$$

Час руху до такої точки вдвічі більший за час потрапляння на криву γ , тобто

$$\theta = \frac{2\alpha(k+1)}{c^{\frac{1}{k}}}.$$

Нехай $x_1^0 > 0$. Як і в попередньому підрозділі, розглянемо функцію

$$f(c) = \frac{1}{2k} \left(2B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}}(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) \right) - c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0.$$

Очевидно,

$$f(0) = \frac{1}{k} B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) > 0,$$

і, оскільки точка x^0 лежить вище кривої γ , то

$$f\left(\frac{1}{(x_1^0)^k}\right) = \frac{1}{2k} B(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}) - \frac{x_2^0}{(x_1^0)^{k+1}} = \alpha - \frac{x_2^0}{(x_1^0)^{k+1}} < 0.$$

Крім того, функція $f(c)$, очевидно, є спадною. Отже, вона має рівно один корінь на інтервалі $(0, (\frac{1}{x_1^0})^k)$.

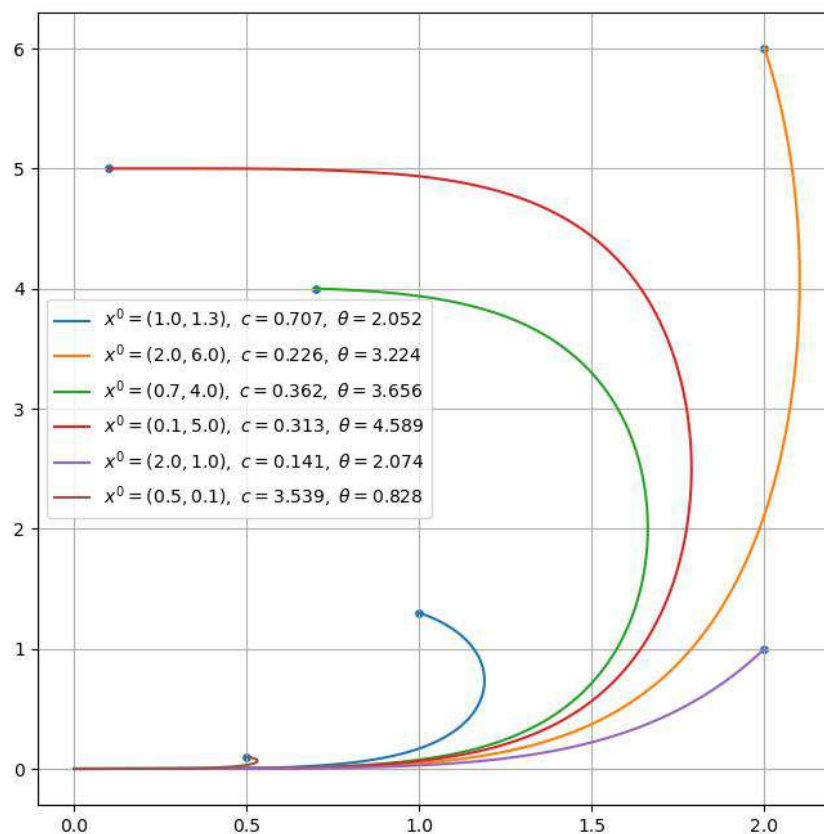


Рис. 4: Оптимальні траєкторії, $k = 2$

Для знаходження часу руху θ , знов використовуючи міркування симетрії, отримуємо таку формулу:

$$\theta = \frac{1}{2k c^{1+\frac{1}{k}}} \left(2B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) \right). \quad (2.21)$$

На рис. 4 зображені кілька оптимальних кривих, які відповідають точкам, що лежать вище і нижче кривої γ . Значення c і час руху θ знайдені за отриманими вище формулами.

2.4 Алгоритм побудови оптимального керування і оптимальної траєкторії

Нарешті, наведемо алгоритм розв'язання задачі оптимальної швидкодії (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. Нехай кінцева точка x^0 належить I квадранту, причому $x_1^0 \geq 0, x_2^0 > 0$.

• Якщо

$$x_2^0 \leq \frac{1}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) (x_1^0)^{k+1},$$

то визначимо c як (єдиний) корінь рівняння

$$c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0 = \frac{1}{2k} B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right), \quad 0 < c \leq \frac{1}{(x_1^0)^k},$$

а θ як

$$\theta = \frac{1}{2k c^{\frac{1}{k}}} B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right).$$

• Якщо

$$x_2^0 > \frac{1}{2k} B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) (x_1^0)^{k+1},$$

то визначимо c як (єдиний) корінь рівняння

$$c^{1+\frac{1}{k}} x_2^0 = \frac{1}{2k} \left(2B\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)\right), \quad 0 < c \leq \frac{1}{(x_1^0)^k},$$

а θ як

$$\theta = \frac{1}{2k c^{1+\frac{1}{k}}} \left(2B\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) - B_{c^2(x_1^0)^{2k}}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Тоді θ є оптимальним часом, оптимальна траєкторія може бути знайдена як перші дві компоненти розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(\xi), \\ \dot{x}_2 = x_1^k \sin(\xi), & x_1(0) = x_2(0) = \xi(0) = 0, \\ \dot{\xi} = ckx_1^{k-1}, \end{cases}$$

на відрізку $t \in [0, \theta]$, а оптимальне керування дорівнює

$$u_1(t) = \cos(\xi(t)), \quad u_2(t) = \sin(\xi(t)),$$

де $\xi(t)$ – третя компонента розв'язку цієї задачі Коші.

Якщо $x_1^0 > 0, x_2^0 = 0$, то оптимальне керування дорівнює $u_1(t) = 1, u_2(t) = 0$, а оптимальний час дорівнює $\theta = x_1^0$.

Якщо кінцева точка x^0 не належить I квадранту, то для отримання розв'язку достатньо розв'язати задачу для точки $(|x_1^0|, |x_2^0|)$, а потім віддзеркалити отриману оптимальну траєкторію і оптимальні керування в залежності від парності k , як пояснено у підрозділі 1.3.

Зауваження. Якщо c вже знайдено, то оптимальні керування можна записати як функції x :

$$u_1(x) = \text{sign}(\alpha x_1^{k+1} - x_2) \sqrt{1 - c^2 x_1^{2k}}, \quad u_2(x) = c x_1^{2k}.$$

Оптимальну траєкторію як криву на площині можна записати так:

- якщо $x_2^0 \leq \alpha(x_1^0)^{k+1}$, то

$$x_2 = \frac{1}{2kc^{1+\frac{1}{k}}} B_{c^2 x_1^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq x_1 \leq x_1^0,$$

- якщо $x_2^0 > \alpha(x_1^0)^{k+1}$, то оптимальна траєкторія – це об'єднання двох кривих:

$$x_2 = \frac{1}{2kc^{1+\frac{1}{k}}} B_{c^2 x_1^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{c^{\frac{1}{k}}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2kc^{1+\frac{1}{k}}} \left(2B \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) - B_{c^2 x_1^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right)\right), \quad x_1^0 \leq x_1 \leq \frac{1}{c^{\frac{1}{k}}}.$$

Висновки

У роботі було проведено дослідження задачі швидкодії для одного класу двовимірних нелінійних систем. Ми обмежилися випадком, коли початкова точка – це початок координат. Для знаходження оптимального керування був застосований принцип максимуму Понтрягіна. У результаті було показано, що оптимальні керування є неперервно-диференційовними функціями часу, і отримано систему диференціальних рівнянь для знаходження оптимальних траєкторій. Ця система містить числовий параметр c , який необхідно знайти для кожної кінцевої точки.

Було показано, що, оскільки система має властивості симетрії, можна обмежитись дослідженням кінцевих точок, які належать I квадранту на площині. Встановлено, що оптимальні траєкторії можуть мати точки повороту, які утворюють криву γ . Рівняння цієї кривої та відповідний момент часу повороту можна виразити в явному вигляді з застосуванням бета-функції.

Метод знаходження параметра c відрізняється для точок, які лежать нижче і вище кривої повороту. У роботі вписані відповідні рівняння для знаходження значення параметра в цих випадках, і доведено, що кожне з них має єдиний розв'язок. Ці рівняння містять неповну бета-функцію. Отримані також формули для знаходження часу швидкодії. Якщо значення параметра c і оптимальний час відомі, то оптимальні траєкторії можна знайти чисельно, розв'язуючи задачу Коші для тривимірної системи диференціальних рівнянь.

Отримані рівняння для визначення параметра c були проілюстровані за допомогою чисельного моделювання в середовищі Python. Побудовані сімейства оптимальних кривих підтверджують коректність отриманого розв'язку.

Список використаних джерел

- [1] Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In: Sub-Riemannian Geometry. Progress in Mathematics, 1996, V.144, Birkhäuser Basel. P. 1–78.
- [2] Montgomery R. A Tour of Sub-Riemannian Geometry. Providence: American Mathematical Society, 2002, 284 p.
- [3] Sklyar G.M., Ignatovich S.Y. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 2014. Vol. 504. P. 1-88.
- [4] Спорова О.О. Субріманова метрика і нелінійна задача швидкодії. Кваліфікаційна робота магістра. Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2023, 41 с.
- [5] Adamowicz T., Walicki M., Warhurst B. Harmonic mappings on Grushin planes. *Journal of Differential Equations*. 2026. Vol. 453, No. 113806.
- [6] Albert M., Borza S., Gordina M. Geodesics on Grushin spaces. Preprint. 3 Sep. 2025. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.03411>
- [7] Borza S. Distortion Coefficients of the α -Grushin Plane. *Journal of Geometric Analysis*. 2022. Vol. 32, No.78.
- [8] Дуда Д. Аналітичний опис оптимальних траєкторій та часу руху в узагальненій моделі Грушина. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях : тези доповідей XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених (5-6 травня 2026 р., м. Харків, Україна). – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2026. С. 78-81.
- [9] Filippov A.F. On certain questions in the theory of optimal control. *J. SIAM Control Ser. A*. 1962. Vol. 1. P.76-84.

[10] Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V. and Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Wiley Interscience, New York, 1962.

[11] NIST Digital Library of Mathematical Functions, URL: <https://dlmf.nist.gov>

Додатки

Код 1 для побудови рис. 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.special import beta, betainc

k = 2
a = 1/(2*k) + 1
b = 1/2
alpha = beta(a, b) / (2*k)

def f_cross(x, x10, x20):
    return (2 + betainc(a, b, x**2*x10**(2*k))) * alpha - x**(1+1/k)*x20

def th_cross(x, x10):
    return (2 + betainc(a-1, b, x**2*x10**(2*k))) * beta(a-1, b)/(2*k)/x**(1/k)

def s_cross(A, B, x10, x20):
    for _ in range(40):
        C = (A + B) / 2
        if f_cross(C, x10, x20) > 0:
            A = C
        else:
            B = C
    return C

def f_dir2(x, x10, x20):
    return (2 - betainc(a, b, x**2*x10**(2*k))) * alpha - x**(1+1/k)*x20

def th_dir2(x, x10):
    return (2 - betainc(a-1, b, x**2*x10**(2*k))) * beta(a-1, b)/(2*k)/x**(1/k)

def s_dir2(A, B, x10, x20):
    for _ in range(40):
        C = (A + B) / 2
        if f_dir2(C, x10, x20) > 0:
            A = C
        else:
            B = C
    return C
```

Код 1 для побудови рис. 1, продовження

```
def F(t, x, c):
    x1, xi, x2 = x
    return [np.cos(xi), c*k*x1**(k-1), x1**k*np.sin(xi)]

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 7))
ax.grid(True)
N = 601

X_target = 1.0
Y_target = 4.0 * alpha * X_target**(k+1)
target = [-X_target, Y_target]

ax.scatter([target[0]], [target[1]], color='red', s=70, zorder=5, label=f"Спільна ціль: ({target[0]:.1f}, {target[1]:.2f})")

c_cross = s_cross(0, 1/X_target**k, X_target, Y_target)
Tmax_cross = th_cross(c_cross, X_target)
y0_cross = [0, 0, 0]
res_cross = solve_ivp(F, [0, Tmax_cross], y0_cross, args=(c_cross,), dense_output=True, method="Radau")
t_cross = np.linspace(0, Tmax_cross, N)
sol_cross = res_cross.sol(t_cross)
ax.plot(sol_cross[0], sol_cross[2], color='blue', linewidth=2, label="T1 (1 перетин осей)")

c_dir2 = s_dir2(0, 1/X_target**k, X_target, Y_target)
Tmax_dir2 = th_dir2(c_dir2, X_target)
y0_dir2 = [0, np.pi, 0]
res_dir2 = solve_ivp(F, [0, Tmax_dir2], y0_dir2, args=(c_dir2,), dense_output=True, method="Radau")
t_dir2 = np.linspace(0, Tmax_dir2, N)
sol_dir2 = res_dir2.sol(t_dir2)
ax.plot(sol_dir2[0], sol_dir2[2], color='green', linewidth=2, linestyle='--', label="T2 (без перемикання квадранта)")

ax.axhline(0, color='black', linewidth=1.2)
ax.axvline(0, color='black', linewidth=1.2)
plt.legend()
plt.xlabel("x1")
plt.ylabel("x2")
plt.title("Дві різні криві, що сходяться в одній точці")
plt.show()
```

Код 2 для побудови рис. 2

```
#Кілька оптимальних кривих
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.special import beta

N = 601
k = 2

def F(t,x,c):
    x1,xi,x2 = x
    return np.cos(xi), c*k*x1**(k-1), x1**k*np.sin(xi)

x0 = [0,0,0]
T = 10

cc = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.]

fig, ax = plt.subplots(1,1)
ax.grid(True)

Tmax_all = beta(1/2,1/(2*k))/k

for c in cc:
    Tmax = Tmax_all/c**(1/k)
    res = solve_ivp(F, [0,Tmax], x0, args=(c,), dense_output=True, method = "Radau")
    t = np.linspace(0,Tmax,N)
    sol = res.sol(t)
    ax.plot(sol[0], sol[2],label=fr"$c={c}$")

plt.legend()

X = 1/min(cc)**(1/k)
alpha = beta(1/2,1+1/(2*k))/2/k
tt = np.linspace(0,X,N)
ax.plot(tt,tt**(k+1)*alpha)
```

Код 3 для побудови рис. 3

```
#Графік функції, коренем якого є c
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import beta, betainc

N = 601
k = 2

fig, ax = plt.subplots(1,1)
ax.grid(True)
x10 = 1.5
x20 = 0.7

a = 1/(2*k) + 1
b = 1/2

def f(x,a,b):
    "equation for finding c"
    return betainc(a,b,x**2*x10**(2*k))*beta(a,b)/(2*k) - x**(1+1/k)*x20

def th(x,a,b):
    "equation for finding theta"
    return betainc(a-1,b,x**2*x10**(2*k))*beta(a-1,b)/(2*k)/x**(1/k)

def s(A,B):
    "solves the equation f(c,a,b)=0 to find c"
    for i in range(20):
        C = (A + B)/2
        if f(C,a,b) < 0:
            A = C
        else:
            B = C
    return C

tt = np.linspace(0,1/x10**k,N)
ax.plot(tt, f(tt,a,b),label=fr"$x^{\theta}=\{x10,x20\}$")
plt.legend()
c0 = s(0,1/x10**k)
print(c0)
print(th(c0,a,b))
```

Код 4 для побудови рис. 4

```
#Оптимальні криві для заданих кінцевих точок
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.special import beta, betainc

k = 2

a = 1/(2*k) + 1
b = 1/2

def f(x,a,b):
    "equation for finding c"
    return betainc(a,b,x**2*x10**(2*k))*beta(a,b)/(2*k) - x**(1+1/k)*x20

def f1(x,a,b):
    "equation for finding c"
    return (2-betainc(a,b,x**2*x10**(2*k)))*beta(a,b)/(2*k) - x**(1+1/k)*x20

def th(x,a,b):
    "equation for finding theta"
    return betainc(a-1,b,x**2*x10**(2*k))*beta(a-1,b)/(2*k)/x**(1/k)

def th1(x,a,b):
    "equation for finding theta"
    return (2-betainc(a-1,b,x**2*x10**(2*k)))*beta(a-1,b)/(2*k)/x**(1/k)

def s(A,B):
    "solves the equation f(c,a,b)=0 to find c"
    for i in range(30):
        C = (A + B)/2
        if f(C,a,b) < 0:
            A = C
        else:
            B = C
    return C

def s1(A,B):
    "solves the equation f1(c,a,b)=0 to find c"
    for i in range(30):
        C = (A + B)/2
        if f1(C,a,b) > 0:
            A = C
        else:
            B = C
    return C
```

Код 4 для побудови рис. 4, продовження

```
def F(t,x,c):
    "system with xi for plotting trajectory"
    x1,xi,x2 = x
    return np.cos(xi), c*k*x1**(k-1), x1**k*np.sin(xi)

#####

fig, ax = plt.subplots(1,1)
ax.grid(True)
N = 601
y0 = [0, 0, 0]
alpha = beta(1/2,1+1/(2*k))/(2*k)

x0 = np.array([[1.,1.3],[2.,6.],[0.7,4.],[0.1,5.],[2.,1.],[.5,.1]])
ax.scatter(x0[:,0], x0[:,1], s=15)

for w in x0:
    x10, x20 = w
    if x20 > x10**(k+1)*alpha:
        c = s1(0,1/x10**k)
        Tmax = th1(c,a,b)
    else:
        c = s(0,1/x10**k)
        Tmax = th(c,a,b)

    res = solve_ivp(F, [0,Tmax], y0, args=(c,), dense_output=True, method = "Radau")
    t = np.linspace(0,Tmax,N)
    sol = res.sol(t)
    ax.plot(sol[0], sol[2],label=f'r"$x^0=({x10:.1f},{x20:.1f})$, \ c={c:.3f}$, \ \theta={Tmax:.3f}$")

plt.legend()

#X = 1/min(cc)**(1/k)
#alpha = beta(1/2,1+1/(2*k))/2/k
#tt = np.linspace(0,X,N)
#ax.plot(tt,tt**(k+1)*alpha)
```