

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. ректора Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна,
заступник Голови приймальної комісії

_____ Олександр ГОЛОВКО

ПРОГРАМА

**вступного іспиту зі спеціальності
для вступників на навчання
на здобуття ступеня доктора філософії
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»**

Харків 2024

Алгебра

1. Поняття поля, кільця, групи. Теорема Лагранжа.
2. Многочлени однієї змінної, їх властивості. Теорема Безу, кратність кореня та похідна, основна теорема алгебри, інтерполяція.
3. Основні властивості многочленів декількох змінних. Основна теорема про симетричні многочлени.
4. Системи лінійних рівнянь та основні методи їх розв'язання.
5. Ранг матриці, теорем про ранг.
6. Лінійні відображення, властивості ядра та образу лінійного відображення. Поняття лінійного функціоналу та двоїстого простору.
7. Поняття інваріантного підпростору лінійного оператора. Властивості власних векторів та власних значень лінійного оператора.
8. Визначення та властивості білінійних та квадратичних функціоналів, зв'язок між симетричними білінійними та квадратичними функціоналами, алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичних функціоналів, додатно визначені квадратичні форми.
9. Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Властивості самоспряжених та унітарних операторів в ермітовому просторі.
10. Жорданова форма лінійного оператора.

Математичний аналіз

1. Числові послідовності: збіжність, границя. Основні теореми про границі. Точні верхня та нижня межі числової множини.
2. Границя функції в точці, основні теореми про границі. Чудові границі. Еквівалентні функції. Символи o та O , їх властивості та використання.
3. Неперервність числової функції. Теорема Вейерштрасса. Рівномірна неперервність.
4. Похідна та її властивості. Похідні елементарних функцій. Основні теореми диференціального числення. Правила Лопіталя. Формула Тейлора. Ряди Тейлора елементарних функцій.
5. Дослідження функцій за допомогою диференціального числення.
6. Невизначений інтеграл, методи інтегрування. Визначений інтеграл Рімана та його властивості. Застосування визначеного інтеграла. Невласні інтеграли.
7. Числові ряди, залишок ряду. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди. Ознаки збіжності.
8. Функціональні ряди, поточкова та рівномірна збіжність. Неперервність суми, почленне диференціювання та інтегрування.
9. Ряди з комплексними членами. Степеневі ряди. Властивості степеневих рядів в крузі збіжності.

10. Теорема про обернену функцію, теорема про неявне відображення, теорема про ранг.
11. Екстремуми функцій кількох змінних. Умовний екстремум.
12. Кратні інтеграли Рімана, їх властивості та застосування.

Диференціальні рівняння

1. Основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Системи диференціальних рівнянь. Зведення рівняння n -го порядку до системи. Лема Гронуолла-Беллмана.
3. Теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійних рівнянь та систем. Теореми про залежність розв'язків задачі Коші від параметрів та початкових умов.
4. Лінійні системи. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи.
5. Теореми про загальні розв'язки лінійних однорідної та неоднорідної систем.
6. Лінійні диференціальні рівняння, теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійних рівнянь. Теореми про загальні розв'язки лінійних однорідного та неоднорідного рівнянь.
7. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Неоднорідні лінійні рівняння з квазіполіноміальною правою частиною.
8. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами. Означення функції від матриці для функції, визначеної на спектрі цієї матриці. Інтерполяційні поліноми та їх властивості. Інтерполяційний поліном Лагранжа-Сильвестра.
9. Теорема про фундаментальність матричної експоненти. Теореми про загальний розв'язок та розв'язок задачі Коші для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.
10. Крайова задача та функція Гріна для лінійних рівнянь та систем.
11. Лінійні рівняння з частинними похідними першого порядку.
12. Стійкість, асимптотична стійкість та нестійкість за Ляпуновим розв'язків систем диференціальних рівнянь. Функція Ляпунова. Теореми Ляпунова про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість.
13. Стійкість лінійних систем. Критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості за Ляпуновим для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння математичної фізики

1. Постановки основних крайових задач для оператора Лапласа. Поняття класичного розв'язку. Формули Гріна для оператора Лапласа. Функція Гріна задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

2. Крайові задачі для рівняння Пуассона в кулі та крузі. Метод відокремлення змінних. Метод потенціалів.
3. Об'ємний потенціал і його властивості. Потенціал простого шару, потенціал подвійного шару, їх властивості. Зведення граничних задач Діріхле і Неймана для оператора Лапласа до граничних інтегральних рівнянь.
4. Класичні розв'язки рівняння теплопровідності. Рівняння теплопровідності на всій вісі. Теорема єдиності класичного розв'язку. Однорідне та неоднорідне рівняння теплопровідності на всій вісі. Формули Пуассона.
5. Рівняння теплопровідності на напівосі та в обмеженій області. Метод відокремлення змінних.
6. Хвильове рівняння в обмеженій області. Метод відокремлення змінних.
7. Хвильове рівняння на всій вісі. Формула Даламбера. Теорема існування та єдиності класичних розв'язків. Хвильова інтерпретація розв'язків.
8. Поширення хвиль у просторі. Метод відокремлення змінних для рівняння коливань круглої мембрани.

Комплексний аналіз

1. R- та C-диференційованість функцій комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. Означення голоморфної функції.
2. Гармонічні функції. Властивості гармонічних функцій. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.
3. Інтеграл від функції комплексної змінної. Зв'язок з криволінійними інтегралами. Формула Ньютона-Лейбниці. Первісна.
4. Теорема Коші для трикутника. Теорема Коші для замкненої кривій в однозв'язній області. Теорема Коші для функції, неперервної в замкненій області.
5. Інтегральна формула Коші. Диференціювання інтегралу типа Коші.
6. Нескінченна диференційованість голоморфних функцій. Теорема Морери. Теорема Вейєрштрасса про рівномірно збіжну послідовність голоморфних функцій.
7. Степеневі ряди. Розклад голоморфної функції у степеневі ряди. Нерівність Коші для коефіцієнтів степеневого ряду. Теорема Ліувілля.
8. Нулі голоморфних функцій. Перша теорема єдиності. Теорема про те, що нулі не можуть згущатися. Безпосереднє аналітичне продовження. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.
9. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки. Визначення характеру ізольованих особливих точок.
10. Лишки. Обчислення лишків. Теорема Коші про лишки. Застосування

лишків.

11. Принцип аргументу. Теореми Руше та Гурвіца. Основна теорема алгебри.

12. Елементарні конформні відображення. Означення конформного відображення. Необхідні та достатні умови конформності. Дробово-лінійні відображення та їх властивості.

Функціональний аналіз

1. Метричні простори. Принцип стислих відображень. Компактні множини в метричних просторах. Теорема Вейєрштрасса. Поповнення метричних просторів.

2. Нормовані простори. Лема Рісса. Некомпактність кулі в банахових просторах.

3. Гільбертові простори, розклад у пряму суму підпросторів.

4. Ортонормовані системи. Ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Критерій збіжності ряду Фур'є до елемента. Теорема Рісса-Фішера.

5. Лінійні обмежені оператори у нормованих просторах. Норма лінійного оператора. Розширення лінійного оператора за неперервністю. Простір лінійних неперервних операторів, його повнота.

6. Принцип рівномірної обмеженості. Теорема Банаха-Штейнгауза, її застосування.

7. Зворотний оператор. Критерій існування обмеженого зворотного оператора. Зворотність оператора, що близький до одиничного. Теорема Банаха про зворотний оператор.

8. Принцип відкритості відображення. Замкнені оператори. Спектр і резольвента лінійного оператора. Теорема Банаха про зворотний оператор.

9. Лінійні обмежені функціонали. Опуклі функціонали. Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала в дійсному лінійному просторі.

10. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Відокремлюваність опуклих множин у нормованому просторі.

11. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів.

12. Вкладення банахова простору у другий спряжений простір. Спряжені оператори, слабка збіжність елементів.

Теорія керування

1. Керованість лінійних систем, критерій Калмана. Побудова керувань, що розв'язують задачу потрапляння із точки в точку за заданий час для повністю керованих лінійних систем.

2. Канонічна форма повністю керованої лінійної системи з одновимірним керуванням. Задача про переміщення спектру.

3. Стабілізація повністю керованих систем. Побудова стабілізуючих керувань. Стабілізація неповністю керованих лінійних систем.
4. Спостережуваність лінійних систем, критерії спостережуваності. Зв'язок між керованістю та спостережуваністю для лінійних систем.
5. Керованість та стабілізованість нелінійних трикутних систем. Теорема Коробова. Відображення трикутних систем на лінійні. Знаходження оберненого відображення.
6. Задача оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна.
7. Задача лінійної швидкодії. Зв'язок з проблемою моментів Маркова.

Теорія ймовірностей

1. Простір елементарних подій; випадкова подія та її ймовірність. Властивості ймовірностей випадкових подій.
2. Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
3. Незалежні події. Теорема множення. Послідовність незалежних випробувань. Схема Бернуллі. Гранична теорема Пуассона.
4. Аксиоматична побудова теорії ймовірностей. Аксиоматика Колмогорова.
5. Поняття випадкової величини. Функція розподілу та її властивості. Дискретні та неперервні розподіли. Щільність імовірності та її властивості.
6. Числові характеристики випадкових величин. Характеристична функція та її властивості.
7. Основні закони розподілів: Бернуллі, Пуассона, рівномірний, нормальний. Функція Лапласа та її властивості; таблиці математичної статистики.
8. Послідовності випадкових величин та типи їх збіжності.
9. Поняття закону великих чисел. Нерівності Чебишева та теорема Чебишева. Посилений закон великих чисел. Нерівність Колмогорова та теорема Колмогорова.
10. Поняття центральної граничної теореми. Теорема Ляпунова. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Чисельний аналіз

1. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання повної та часткової проблем власних значень.
2. Інтерполяція за допомогою інтерполяційних поліномів та сплайнів.
3. Методи розв'язання нелінійних рівнянь та систем рівнянь.
4. Метод найменших квадратів.
5. Наближене розв'язання диференціальних рівнянь.
6. Наближене обчислення інтегралів.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. В. І. Андрійчук, Б. В. Забавський. Лінійна алгебра. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2008. – 238 с.
2. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. Диференціальні рівняння. – К.:Либідь, 2003. – 600 с.
3. А. Я. Дороговцев, Математичний аналіз. Київ, 1993. 320 с.
4. М.В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. Математичний аналіз. — К. : Знання, 2008. — 421 с.
5. М. О. Перестюк, В. В. Маринець. Теорія рівнянь математичної фізики. – К. : Либідь, 2006. – 424 с.
6. А. А. Гольдберг, М. М. Шеремета, М. В. Заболоцький, О. Б. Скасків. Комплексний аналіз: підручник. – Львів : Афіша, 2002. – 204 с.
7. В. М. Кадець, Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів : Чижиков І. Е., 2012.– 589 с.
8. В. І. Коробов, Т. І. Смрцова. Керованість та стабілізація : навч. посібник. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2017. – 77 с.
9. Б. В. Гнеденко. Курс теорії ймовірностей. – К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
10. А. Я. Дороговцев. Збірник задач з теорії ймовірностей. – К.: Вища школа, 1976. – 384 с.
11. О. Б. Скасків. Теорія ймовірностей. – Київ : «І. Е. Чижиков», 2012. – 142 с.
12. С. Шахно. Чисельні методи лінійної алгебри. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 245 с.
13. І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. Методи обчислень (у двох частинах). – К.:Вища школа, 1995. – Ч. 1: 367 с., Ч. 2: 431 с.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ВСТУПНИКІВ

Вступний іспит зі спеціальності проводиться у письмовій формі. Кожний білет складається з трьох теоретичних питань з наведеного вище переліку. Формулювання питання може бути конкретизоване. Відповідь на кожне питання білету оцінюється у 200 балів.

Критерії оцінювання відповіді на кожне питання білету.

Оцінка в балах	Пояснення
180 – 200	Вступник демонструє глибоке розуміння і вільне володіння теоретичним матеріалом, обізнаність з літературою, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним, логічним і вичерпним.
140 – 179	Вступник демонструє розуміння значної частини теоретичного матеріалу, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним і логічним, з незначними неточностями.
100 – 139	Вступник в цілому орієнтується в теоретичному матеріалі, може навести приклади і пояснити зміст частини понять і результатів, викладення є неповним, містить неточності.
50–99	Вступник погано орієнтується у значній частині теоретичного матеріалу, не може пояснити зміст основних понять і результатів, викладення містить численні неточності.
0-49	Вступник не орієнтується у теоретичному матеріалі, допускає суттєві помилки, не може пояснити зміст понять і результатів.

Загальна оцінка обраховується як середнє арифметичне оцінок за трьома завданнями з округленням до цілого числа у бік збільшення. Вступник може брати участь у конкурсному відборі, якщо його загальна оцінка складає не менше 100 балів.

Голова предметної комісії

Валерій КОРОБОВ

Засідання приймальної комісії від «15» квітня 2024 р., протокол № 2.

Відповідальний секретар
приймальної комісії

Сергій СЛЬЦОВ

ПРОГРАМА

**додаткового іспиту зі спеціальності
для вступників на навчання
на здобуття ступеня доктора філософії
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
(складають особи, які вступають до аспірантури на основі НРК7 з
іншої галузі знань (спеціальності), ніж та, яка зазначена в їхньому
дипломі)**

Алгебра

1. Визначення групи, підгрупи. Теорема Лагранжа.
2. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах, їх матриці, власні значення та власні вектори.
3. Самоспряжені оператори у скінченновимірних просторах та їх квадратичні форми. Зведення до діагонального вигляду.
4. Системи лінійних рівнянь. Теореми Крамера і Кронекера-Капеллі.

Математичний аналіз

1. Диференційованість функції декількох змінних. Задача на умовний екстремум.
2. Функціональні ряди. Рівномірна збіжність. Властивості сум функціональних рядів.
3. Криволінійні та поверхневі інтеграли та їх властивості.
4. Теорема про неявне відображення.

Диференціальна геометрія

1. Перша квадратична форма регулярної поверхні. Ізометрія. Критерій ізометричності.
2. Друга квадратична форма регулярної поверхні. Головні кривини і головні напрями регулярної поверхні. Лінії кривини. Гаусова і середня кривина поверхні.

Диференціальні рівняння

1. Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь.
2. Лінійні диференціальні рівняння та системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
3. Стійкість за Ляпуновим розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.

Комплексний аналіз

1. Теорема про інтеграл уздовж замкненого контуру. Інтегральна формула Коші.
2. Принцип максимуму модуля для аналітичних функцій.
3. Розкладання аналітичних функцій в ряд Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок.
4. Принцип аргументу і теорема Руше.

Варіаційне числення та теорія керування

1. Найпростіша задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера.
2. Керованість лінійних систем. Критерій Калмана.
3. Задача оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна. Приклади.

Функціональний аналіз

1. Метричний простір. Повнота. Принцип стискаючих відображень.
2. Гільбертів простір. Ортогональні розвинення в гільбертовому просторі. Теорема про існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі.
3. Лінійні обмежені оператори в банаховому просторі. Приклади.
4. Абстрактна проблема моментів.

Рівняння математичної фізики

1. Задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності.
2. Малі коливання струни, що закріплена на кінцях. Власні коливання та власні частоти. Метод Фур'є.
3. Крайові задачі для рівняння Лапласа. Функція Гріна задачі Діріхле.

Теорія ймовірностей

1. Основні поняття теорії ймовірностей. Формули повної ймовірності і Байєса.
2. Випадкова величина, функція розподілу, щільність. Математичне сподівання, дисперсія.
3. Закон великих чисел.
4. Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.

Методи обчислень

1. Точні та ітераційні методи розв'язання систем лінійних рівнянь (по

одному на вибір).

2. Інтерполяція функцій.
3. Чисельні методи інтегрування.
4. Метод найменших квадратів у задачі апроксимації.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. В. І. Андрійчук, Б. В. Забавський. Лінійна алгебра. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2008. – 238 с.
2. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. Диференціальні рівняння. – К.:Либідь, 2003. – 600 с.
3. А. Я. Дороговцев, Математичний аналіз. Київ, 1993. 320 с.
4. М.В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. Математичний аналіз. — К. : Знання, 2008. — 421 с.
5. М. О. Перестюк, В. В. Маринець. Теорія рівнянь математичної фізики. – К. : Либідь, 2006. – 424 с.
6. А. А. Гольдберг, М. М. Шеремета, М. В. Заболоцький, О. Б. Скасків. Комплексний аналіз: підручник. – Львів : Афіша, 2002. – 204 с.
7. В. М. Кадець, Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів : Чижиков І. Е., 2012.– 589 с.
8. В. І. Коробов, Т. І. Смрцова. Керованість та стабілізація : навч. посібник. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2017. – 77 с.
9. Б. В. Гнеденко. Курс теорії ймовірностей. – К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
10. А. Я. Дороговцев. Збірник задач з теорії ймовірностей. – К.: Вища школа, 1976. – 384 с.
11. О. Б. Скасків. Теорія ймовірностей. – Київ : «І. Е. Чижиков», 2012. – 142 с.
12. С. Шахно. Чисельні методи лінійної алгебри. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 245 с.
13. І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. Методи обчислень (у двох частинах). – К.:Вища школа, 1995. – Ч. 1: 367 с., Ч. 2: 431 с.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ВСТУПНИКІВ

Кожний білет складається з трьох теоретичних питань з наведеного вище переліку. Формулювання питання може бути конкретизоване. Відповідь на кожне питання білету оцінюється у 200 балів.

180-200 балів: вступник демонструє глибоке розуміння і вільне володіння теоретичним матеріалом, обізнаність з літературою, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним, логічним і вичерпним.

140-179 балів: вступник демонструє розуміння значної частини теоретичного матеріалу, може навести приклади і пояснити зміст понять і результатів, викладення є грамотним і логічним, з незначними неточностями.

100-139 балів: вступник в цілому орієнтується в теоретичному матеріалі, може навести приклади і пояснити зміст частини понять і результатів, викладення є неповним, містить неточності.

50-99 балів: вступник погано орієнтується у значній частині теоретичного матеріалу, не може пояснити зміст основних понять і результатів, викладення містить численні неточності.

0-49 балів: вступник не орієнтується у теоретичному матеріалі, допускає суттєві помилки, не може пояснити зміст понять і результатів.

Загальна оцінка обраховується як середнє арифметичне оцінок за трьома завданнями з округленням до цілого числа у бік збільшення. Вступник може брати участь у конкурсному відборі, якщо його загальна оцінка складає не менше 100 балів.

Голова предметної комісії

Валерій КОРОБОВ

Засідання приймальної комісії від «15» квітня 2024 р., протокол № 2.

Відповідальний секретар
приймальної комісії

Сергій ЄЛЬЦОВ