

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



2023 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія міри та інтеграла

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти перший (бакалаврський)

галузь знань 11 –Математика та статистика

спеціальність 113 Прикладна математика
(шифр і назва)

освітня програма Прикладна математика
(шифр і назва)

спеціалізація _____
(шифр і назва)

вид дисципліни обов'язкова
(обов'язкова / за вибором)

факультет математики і інформатики

2023 / 2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики
 “29” серпня 2023 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Фардигола Лариса Василівна**, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 професор кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри Прикладної математики
 Протокол від “28” серпня 2023 року № 10

Завідувач кафедри Прикладної математики

ВК
 (підпис) Валерій КОРОБОВ
 (прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми (керівником проектної
 групи) Прикладна математика
 назва освітньої програми

Гарант освітньо-професійної програми
 (керівник проектної групи) Прикладна математика

С
 Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики
і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
 (назва факультету, для здобувачів вищої освіти якого викладається навчальна дисципліна)

Протокол від “29” серпня 2023 року, протокол № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики

А
 (підпис) Ольга АНОЩЕНКО
 (прізвище та ініціали)

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**Теорія міри та інтеграла**” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки

бакалавр

(назва рівня вищої освіти)

спеціальності (напряму) 113 Прикладна математика

спеціалізації _____

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. **Мета викладання** навчальної дисципліни:

Ознайомлення студентів із сучасною теорією міри та інтеграла.

1.2. **Основні завдання** вивчення дисципліни:

Навчити студентів теоретичним основам та практичним навичкам в галузі сучасної теорії міри та інтеграла.

1.3. Кількість кредитів: 4

1.4. Загальна кількість годин: 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<u>обов'язкова</u>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	-й
Семестр	
5-й	-й
Лекції	
32 год.	Год.
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	Год.
Лабораторні заняття	
0 год.	Год.
Самостійна робота, у тому числі	
56 год.	Год.
у тому числі індивідуальні завдання	
10 год.	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

знати:

- Означення та властивості півкільця, кільця, 4ів алгебри, алгебри, σ -кільця, σ -алгебри, монотонного класу множин та класів множин, породжених ними.
- Означення та властивості міри.
- Схему побудови та властивості абстрактної зовнішньої міри, міри Лебега на прямій та в \mathbb{R}^m , міри Лебега-Стілтєса на прямій.
- Означення та властивості вимірних відображень та функцій.
- Означення та властивості інтеграла Лебега на прямій та в \mathbb{R}^m , а також інтеграла Лебега-Стілтєса на прямій.
- Основні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.
- Означення та властивості зарядів, розклади Жордана та Гана. Поняття абсолютної неперервності та сингулярності, теорему Радона-Нікодіма
- Поняття вимірних множин та функцій на добутку просторів, добуток мір, теорему Фубіні.

Вміти:

- Визначати належність функцій до важливих класів множин, досліджувати властивості класів множин.
- Визначати вимірність та міру множини.
- Визначати належність функцій до класів вимірних функцій.
- Визначати належність функцій до класу функцій, вимірних за Лебегом.
- Порівнювати інтеграли Рімана та Лебега.
- Оцінювати інтеграл Лебега та вміти користатися теоремами про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Класи множин та функції множин

Тема 1. Основні класи множин.

Тема 2. Породжені класи множин.

Розділ 2. Функції множин та міри.

Тема 1. Функції множин.

Тема 2. Міри.

Тема 3. Продовження міри. Міра Лебега та Лебега-Стілтєса.

Розділ 3. Вимірні відображення та функції

Тема 1. Вимірні відображення.

Тема 2. Борелеві функції та функції вимірні за Лебегом.

Тема 3. Властивості вимірних функцій.

Тема 4. Типи збіжності та зв'язок між ними.

Розділ 4. Інтеграл Лебега

Тема 1. Визначення та елементарні властивості інтеграла Лебега.

Тема 2. Властивості інтеграла Лебега.

Тема 3. Основні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Тема 4. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега.

Тема 5. Інтеграл Лебега-Стілтєса.

Розділ 5. Інтеграл Лебега, які залежать від параметра

Тема 1. Неперервна залежність інтеграла Лебега від параметра.

Тема 2. Диференційовна залежність інтеграла Лебега від параметра.

Розділ 6. Заряди та абсолютна неперервність**Тема 1.** Заряди. Розклади Гана та Жордана.**Тема 2.** Абсолютна неперервність та сингулярність. Теорема Радона-Нікодіма.**Розділ 7. Інтегрування на добутку просторів****Тема 1.** Вимірні множини в добутку просторів.**Тема 2.** Вимірні функції на добутку просторів та добуток мір.**Тема 3.** Теорема Фубіні.**3. Структура навчальної дисципліни**

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього го	у тому числі					Усього о	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1												
Тема 1	4	2	2									
Тема 2	6	1	2			3						
Разом за розділом 1	10	3	4			3						
Розділ 2												
Тема 1	4	2	2									
Тема 2	6	1	2			3						
Тема 3	12	4	2			6						
Контрольна робота	2		2									
Разом за розділом 2	24	7	8			9						
Розділ 3												
Тема 1	2	1	1									
Тема 2	2	1	1									
Тема 3	9	1	2			6						
Тема 4	17	2	2			13						
Разом за розділом 3	30	5	6			19						
Розділ 4												
Тема 1	3	2	1									
Тема 2	3	2	1									
Тема 3	6	1	2			3						
Тема 4	2	1	1									
Тема 5	5	1	1			3						
Індивідуальне завдання	10					10						
Разом за розділом 4	29	7	6			16						
Розділ 5												
Тема 1	2	1	1									
Тема 2	8	1	1			6						
Разом за розділом 5	10	2	2			6						
Розділ 6												
Тема 1	2	1	1									
Тема 2	3	2	1									
Разом за розділом 6	5	3	2									
Розділ 7												
Тема 1	5	1	1			3						
Тема 2	3	2	1									
Тема 3	4	2	2									
Разом за розділом 7	12	5	4			3						
Усього годин	120	32	32			56						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні та породжені класи множин.	4
2	Функції множин, міри.	4
3	Продовження міри.	3
4	Вимірні відображення та функції.	3
5	Контрольна робота: Теорія міри	2
6	Інтеграл Лебега та теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.	4
7	Інтеграл Лебега, що залежать від параметра	4
8	Заряди.	4
9	Інтеграл Лебега на добутку просторів.	4
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Виконання домашнього завдання по темі мінімальні класи множин.	5
2	Виконання домашнього завдання по темі приклади мір.	5
3	Виконання домашнього завдання по темі єдиність продовження міри.	5
4	Виконання домашнього завдання по темі міра Лебега в R^m .	5
5	Виконання домашнього завдання по темі приклади вимірних відображень.	5
6	Виконання домашнього завдання по темі суперпозиція вимірних відображень.	4
7	Виконання домашнього завдання по темі інтеграл Лебега.	5
8	Індивідуальне завдання: Вимірні функції та інтеграл Лебега	10
9	Виконання домашнього завдання по темі диференційовність інтеграла Лебега за параметром.	4
10	Виконання домашнього завдання по темі заміна змінної в інтегралі Лебега.	4
11	Виконання домашнього завдання по темі вимірні множини в добутку просторів.	4
	Разом	56

6. Індивідуальне завдання

1. Вимірні функції та інтеграл Лебега.

7. Методи навчання

Частково-пошукові і проблемні лекції, пояснення, пояснювально-ілюстративні методи при проведенні практичних занять, консультації.

8. Методи контролю

Перевірка виконання домашніх робіт, контрольної роботи та індивідуального завдання.
Проведення екзамену.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен	Сума
Розділи1-3	Розділи4-7	Контрольна робота	Індивідуальне завдання	Разом		
20	20	10	10	60	40	100

Для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

Шкала оцінювання (чотирирівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70 – 89	добре
50 – 69	задовільно
1 – 49	незадовільно

Критерії оцінювання

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Контрольна робота (містить 3 завдання, максимальна оцінка 10 балів):

1. У завданні 1 максимальна оцінка 3 бали (пункт (i) — 2 бали, пункт (ii)— 1 бал):
 - (i) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали.
 - (ii) (1) дано неправильну відповідь, або не обґрунтовано її – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 1 бал.
2. У завданні 2 максимальна оцінка 3 бали:
 - (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не повністю обґрунтовано її — 1–2бали;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 3 бали.
3. У завданні 3 максимальна оцінка 4 бали (пункт (i) — 2 бали, пункт (ii)— 1 бал, пункт (iii) — 1 бал):
 - (i) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали;
 - (ii) (1) дано неправильну відповідь, або не обґрунтовано її – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 1 бал.
 - (iii) (1) дано неправильну відповідь, або не обґрунтовано її – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 1 бал.

Індивідуальне завдання (містить 3 завдання, максимальна оцінка 10 балів):

1. У завданні 1 максимальна оцінка 4 бали (пункт (i) — 2 бали, пункт (ii) — 1 бал):
 - (i) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали.
 - (ii) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали.

2. У завданні 2 максимальна оцінка 3 бали:

- (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
- (2) дано правильну відповідь, але не повністю обґрунтовано її — 1–2 бали;
- (3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 3 бали.

3. У завданні 3 максимальна оцінка 3 бали:

- (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
- (2) дано правильну відповідь, але не повністю обґрунтовано її — 1–2 бали;
- (3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 3 бали.

Іспит (білет містить 6 завдань, максимальна оцінка 40 балів):

1. У завданні 1 максимальна оцінка 12 балів:

- (а) твердження сформульовано з помилками, доведення відсутнє — 0–5 балів;
- (б) твердження сформульовано вірно, доведення відсутнє — 6 балів;
- (в) твердження сформульовано вірно та наведено менше половини доведення — 7–8 балів;
- (г) твердження сформульовано вірно та в доведенні зроблено суттєві помилки — 9–10 балів;
- (д) твердження сформульовано вірно та в доведенні можливі незначні помилки — 11–12 балів.

2. У завданнях 2–5 максимальна оцінка 5 балів:

- (а) твердження або означення сформульовано з помилками, приклади відсутні — 0–2 балів;
- (б) твердження або означення сформульовано вірно, приклади відсутні — 3 балів;
- (в) твердження або означення сформульовано вірно, наведено приклади — 4–5 балів;

3. У завданні 6 максимальна оцінка 8 балів:

- (а) наведено лише схему обчислення (дослідження) або воно лише розпочато — 0–4 бала;
- (б) наведено розв'язання або дослідження, але зроблено суттєві помилки — 5–6 балів;
- (в) наведено розв'язання або дослідження, можливі незначні помилки, які не впливають на характер обчислення або дослідження — 7–8 балів.

Бали, отримані за виконання всіх завдань, сумуються (максимальна кількість — 40 балів) і додаються до балів, отриманих за практичні завдання. Максимальна сума — 100 балів. Оцінка виставляється за стандартною шкалою оцінювання.

10. Рекомендована література

Основна література

1. Радченко В.М. Теорія міри та інтеграла. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. –144 с.
2. Михалін Г.О. Елементи теорії інтеграла та міри. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2000 –248 с.
3. Дороговцев А.Я. та ін. Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла. – Київ: Вид-во "Київський університет", 2003. – 89 с.

Допоміжна література

4. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 1 – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 2 – К.: Либідь, 1994. – 304 с.