

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор  
з науково-педагогічної роботи

Олександр ГОЛОВКО



2022 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Лінійна алгебра**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 - Математика та статистика, 01 – Освіта/Педагогіка**

спеціальність **111 – Математика, 113 – Прикладна математика,  
014.04 – Середня освіта (Математика)**

освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»,  
«Математика та інформатика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

від 29 серпня 2022 року, протокол № 7

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Каролінський Євген Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доцент,  
доцент кафедри фундаментальної математики.**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол № 1 від 26 серпня 2022 року.

Завідувач кафедри



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми «Математика»

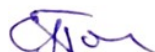
Гарант освітньо-професійної  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної  
програми



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми «Математика та інформатика»

Гарант освітньо-професійної  
програми



Ганна ЧЕРНОВА

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики

Протокол від 29 серпня 2022 року, № 1.

Голова науково-методичної комісії



Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр» спеціальності **111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 014.04 – Середня освіта (Математика)**, освітня програма «Математика», «Прикладна математика», «Математика та інформатика»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є навчання майбутніх спеціалістів основам лінійної алгебри, а також многочленам декількох змінних.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам алгебри та застосуванню цих методів для розв'язання різноманітних задач теоретичного та практичного характеру.

1.3. Кількість кредитів – **6**

1.4. Загальна кількість годин – **180**

<b>1.5. Характеристика навчальної дисципліни</b>	
<b>Обов'язкова</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
<b>2-й</b>	
Семестр	
<b>3-й</b>	
Лекції	
<b>48 год.</b>	
<b>Практичні, семінарські заняття</b>	
<b>48 год.</b>	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
<b>84 год.</b>	
у тому числі індивідуальні завдання	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен **знати:**

- ✓ Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.
- ✓ Основні властивості многочленів декількох змінних. Основну теорему про симетричні многочлени.
- ✓ Теорію жорданової форми лінійного оператора.
- ✓ Означення та властивості білінійних та квадратичних функціоналів, в тому числі зв'язок між симетричними білінійними та квадратичними функціоналами, алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичних функціоналів, канонічний вигляд квадратичних функціоналів над полями дійсних та комплексних чисел, додатно визначені квадратичні форми.
- ✓ Властивості та приклади просторів зі скалярним добутком.

✓ Спектральну теорему для нормальних операторів в ермітовому просторі. Властивості самоспряжених та унітарних операторів в ермітовому просторі. Канонічний вигляд нормального оператора в евклідовому просторі. Класифікацію ортогональних операторів.

#### уміти:

- ✓ Виразити симетричний многочлен через основні симетричні многочлени.
- ✓ Знаходити жорданову форму лінійного оператора та відповідний базис.
- ✓ Приводити квадратичний функціонал до діагонального вигляду за допомогою алгоритму Лагранжа.
- ✓ Знаходити канонічний вид квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел.
- ✓ Перевіряти додатну визначеність квадратичної форми.
- ✓ Знаходити ортогональний та ортонормований базиси підпростору евклідова або ермітова простору.
- ✓ Знаходити ортогональне доповнення до підпростору евклідового або ермітового простору, обчислювати відповідні ортогональні проекції.
- ✓ Знаходити базис діагоналізації нормального оператора в ермітовому просторі.
- ✓ Знаходити канонічний вид матриці нормального оператора в евклідовому просторі та відповідний базис.
- ✓ Приводити квадратичну форму в евклідовому просторі до головних осей.

1.7 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні загальні компетентності :

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, володіння культурою мислення;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, використовувати знання про сучасну природничу картину світу в освітній та професійній діяльності, застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність використовувати основні методи, способи та засоби одержання, зберігання, переробки інформації;
- здатність працювати з комп'ютером як засобом управління інформацією.

1.8 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні фахові компетентності :

- володіння основними положеннями класичних розділів математики, її базовими ідеями та методами;
- здатність здійснювати логічний аналіз математичних об'єктів і процедур та конкретизацію абстрактних математичних знань у процесі вивчення математики;
- володіння культурами математичного мислення, логічною, алгоритмічною та евристичною; розуміння загальної структури математичного знання, взаємозв'язку між різними математичними дисциплінами; здатність користуватися мовою математики, коректно виражати та аргументовано обґрунтовувати наявні знання;
- здатність будувати математичні моделі для вирішення практичних проблем; розуміння критеріїв якості математичного моделювання;
- здатність застосовувати різні сценарії вивчення конкретного математичного матеріалу, накопичувати та систематизувати різні варіанти доказів теорем, розв'язків задач, банків ключових задач тощо;
- володіння основними положеннями історії розвитку математики, еволюції математичних ідей та основними концепціями сучасної математичної науки.

1.9 Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні мати наступні ПРН:

- Знати основні поняття та теореми теорії чисел, лінійної та абстрактної алгебри: лінійні простори та відображення, системи лінійних рівнянь, поліноми, групи. Уміти досліджувати алгебраїчні об'єкти та використовувати їх у теоретичних та практичних задачах. Володіти методами алгебри і теорії чисел.

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

*Розділ 1.* Многочлени декількох змінних

1. Кільце многочленів від декількох змінних. Відсутність дільників нуля. Лема Гауса. Розкладання на незвідні множники.
2. Лексикографічний запис многочлена від декількох змінних. Симетричні многочлени. Основна теорема про симетричні многочлени. Формули Ньютона.

*Розділ 2.* Жорданова форма лінійного оператора

1. Кореневі підпростори лінійного оператора. Жорданова форма лінійного оператора.
2. Функції від лінійного оператора.
3. Централізатор лінійного оператора. Теорема про подвійний централізатор.

*Розділ 3.* Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком

1. Білінійні та квадратичні функціонали, зв'язок між ними.
2. Алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичної форми. Канонічний вигляд квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел.
3. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра.
4. Півторалінійні функціонали.
5. Простори із скалярним добутком, приклади та найпростіші властивості.
6. Алгоритм Грама-Шмідта побудови ортогонального базису.
7. Ортогональне доповнення та його властивості.

*Розділ 4.* Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком

1. Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Приклади: унітарні та самоспряжені оператори, їх власні значення.
2. Комплексифікація.
3. Канонічний вигляд матриці нормального оператора в евклідовому просторі. Випадок самоспряженого та ортогонального операторів.
4. Полярне розкладання лінійного оператора.
5. Квадратичні форми в евклідовому просторі. Теорема про головні осі.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1.</b> Многочлени декількох змінних	30	8	8			14						
<b>Розділ 2.</b>	45	12	12			21						

Жорданова форма лінійного оператора											
<b>Розділ 3.</b> Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком	60	16	16			28					
<b>Розділ 4.</b> Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком	45	12	12			21					
<b>Усього годин</b>	<b>180</b>	<b>48</b>	<b>48</b>			<b>84</b>					

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Многочлени декількох змінних Симетричні многочлени.	8
2	Жорданова форма лінійного оператора Кореневі підпростори лінійного оператора. Жорданова форма лінійного оператора. Функції від лінійного оператора. Централізатор лінійного оператора. Розв'язання операторних та матричних рівнянь.	12
3	Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком Білінійні та квадратичні функціонали, зв'язок між ними. Алгоритм Лагранжа діагоналізації квадратичної форми. Канонічний вигляд квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра. Півторалінійні функціонали. Простори із скалярним добутком, приклади та найпростіші властивості. Алгоритм Грама-Шмідта побудови ортогонального базису. Ортогональне доповнення та його властивості.	14
4	Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком Спектральна теорема для нормальних операторів в ермітовому просторі. Унітарні та самоспряжені оператори. Канонічний вигляд матриці нормального оператора в евклідовому просторі. Випадок самоспряженого та ортогонального операторів. Полярне розкладання лінійного оператора. Квадратичні форми в евклідовому просторі. Теорема про головні осі.	12
5	Контрольна робота.	2
	<b>Разом</b>	<b>48</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Робота над домашніми завданнями протягом семестру, що відповідають темам практичних занять:	

1	Многочлени декількох змінних	14
2	Жорданова форма лінійного оператора	21
3	Білінійні та квадратичні функціонали. Лінійні простори із скалярним добутком (Домашнє завдання)	28
4	Спектральна теорія лінійних операторів в просторах із скалярним добутком (Домашнє завдання)	21
	<b>Разом</b>	<b>84</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом.

### 7. Методи навчання

Лекційно-практичні, пояснювально-ілюстративні, репродуктивні, проблемного викладу, частково-пошукові.

### 8. Методи контролю

- поточний семестровий (контрольна робота);
- підсумковий семестровий (екзамен).

### 9. Схема нарахування балів

Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Екзамен	Сума
60	40	100

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

Оцінка		Пояснення
в балах	за національною шкалою	
90–100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70–89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50–69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість

		передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано, деякі з виконаних завдань містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки.

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90–100	відмінно	зараховано
70–89	добре	
50–69	задовільно	
1–49	незадовільно	не зараховано

## 10. Рекомендована література

### Основна література

1. В. І. Андрійчук, Б. В. Забавський. Лінійна алгебра. – Львів, 2008.
2. E. Vinberg. A Course in Algebra. – AMS, 2003.
3. В. С. Мазорчук. Жорданова нормальна форма. – Київ, 1998.

### Допоміжна література

1. A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin. Linear Algebra and Geometry. – Gordon and Breach, 1997
2. S. Lang. Algebra. – Springer, 2002.