

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“30” 2023 р.



Робоча програма навчальної дисципліни

**КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ**

рівень вищої освіти **бакалавр**

галузь знань **11 – Математика та статистика**

спеціальність **111 – Математика, 113 – Прикладна математика**

освітня програма **«Математика», «Прикладна математика»**

вид дисципліни **обов'язкова**

факультет **математики і інформатики**

2023 / 2024 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження вченою радою факультету математики і інформатики

29 серпня 2023 року, протокол № 8

РОЗРОБНИК ПРОГРАМИ:

**Фаворов Сергій Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри фундаментальної математики**

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики  
протокол від 28 серпня 2023 року № 1.

В. о завідувача кафедри



Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Математика»

Гарант освітньої (професійної)  
програми



Олександр ЯМПОЛЬСЬКИЙ

Програму погоджено з гарантом освітньої (професійної) програми «Прикладна  
математика»

Гарант освітньої (професійної) програми



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і  
інформатики.  
протокол від 29 серпня 2023 року № 1.

Голова науково-методичної комісії



Ольга АНОЩЕНКО

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “ **КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ**”  
складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки «бакалавр»  
спеціальності **111 – Математика, 113 – Прикладна математика**  
освітня програма «**Математика**», «**Прикладна математика**»

### 1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни полягає у наданні майбутнім спеціалістам знань у галузі сучасного комплексного аналізу.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам комплексного аналізу та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.

1.3. Кількість кредитів – 7

1.4. Загальна кількість годин – 210

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<b>Нормативна / за вибором</b>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5, 6 - й	
Лекції	
64 год.	
Практичні, семінарські заняття	
48 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
98 год.	
у тому числі індивідуальні завдання розрахунково-графічні роботи (2)	



1.6. Заплановані результати навчання:

**Знати :**

- означення експоненти, логарифму, тригонометричних функцій комплексної змінної;
- різні похідні для комплекснозначних функцій, їх геометричний сенс;
- означення голоморфних функцій;
- зв'язок між гармонічними та голоморфними функціями;
- означення інтегралу вздовж кривої;
- теорему Коші; інтегральну формулу Коші;
- розвинення основних голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- нерівність Коші, теорему Ліувіля;
- теореми єдності для голоморфних функцій;
- класифікацію ізольованих особливостей голоморфної функції;
- принцип максимуму модуля для голоморфних функцій;

- означення особливих точок; визначення характеру ізольованих особливих точок;
- означення лишків у скінченних та нескінченних ізольованих особливих точках;
- означення цілих та мероморфних функцій;
- розвинення Міттаг-Леффлера для мероморфних функцій;
- теореми Вейерштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченний добуток;
- геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції;
- означення конформного відображення;
- зв'язок між конформними та голоморфними відображеннями;
- основні конформні відображення та їх властивості: дробово-лінійне,  $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$ , функція Жуковського та обернена до неї;
- принцип аргументу, теорему Руше та теорему про збереження області;
- принцип симетрії Рімана-Шварца.

### **Уміти :**

- знаходити логарифм та комплексну ступінь комплексного числа;
- перевіряти виконання умов Коші-Рімана;
- відновлювати голоморфну функцію за заданою дійсною частиною;
- знаходити розвинення голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- проводити класифікацію ізольованих особливостей голоморфних функцій;
- обчислювати лишки та рахувати криволінійні інтеграли за допомогою лишків;
- обчислювати основні типи невластних інтегралів за допомогою лишків;
- обчислювати деякі типи рядів за допомогою лишків;
- розкласти мероморфні функції в ряди за головними частинами;
- будувати конформні відображення однозв'язних областей за допомогою основних конформних відображень: дробово-лінійного,  $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$ , функції Жуковського, користуватися принципом симетрії Рімана-Шварца для побудови конформних відображень деяких областей.

## **2. Тематичний план навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Основні поняття комплексного аналізу.**

#### **Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.**

1. Комплексні числа, дії з комплексними числами.
2. Означення функцій  $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \ln z$ , тригонометричних функцій комплексної змінної.
3. Топологія комплексної площини, розширена комплексна площина, стереографічна проекція.
  1. Функції комплексної змінної, криві, області.

#### **Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції**

1. R- та C- диференційованість функцій комплексної змінної.
2. Умови Коші-Рімана.
3. Означення голоморфної функції.
4. Геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції.
5. Гармонічні функції. Властивості гармонічних функцій.
6. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.

### **Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.**

1. Означення інтегралу вздовж кривої та його властивості.
2. Зв'язок з криволінійними інтегралами.
3. Формула Ньютона-Лейбниці. Первісна.
4. Теорема Коші для трикутника.
5. Теорема Коші для замкненої кривої в однозв'язній області.
6. Теорема Коші для функції, неперервної в замкненій області.

### **Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування**

1. Інтегральна формула Коші.
2. Диференціювання інтегралу типу Коші.
3. Нескінченна диференційованість голоморфних функцій. Теорема Морери.
4. Теорема Вейерштрасса про рівномірно збіжну послідовність голоморфних функцій.
5. Степеневі ряди.
6. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд.
7. Нерівність Коші для коефіцієнтів степеневого ряду.
8. Теорема Ліувілля.

## **Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.**

### **Тема 5. Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.**

1. Нулі голоморфних функцій
2. Перша теорема єдності.
3. Теорема про те, що нулі не можуть згущатися.
  4. Безпосереднє аналітичне продовження.
5. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.

### **Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.**

1. Ряд Лорана, розклад голоморфної функції в ряд Лорана.
2. Визначення характеру ізольованих особливих точок.
3. Теорема Сохоцького-Вейерштрасса.
4. Лишки. Обчислювання лишків.
5. Теореми Коші про лишки.

### **Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.**

1. Обчислення інтегралів по зімкнутому контуру.
2. Лема Жордана
3. Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
4. Обчислення невластивих інтегралів.
5. Підсумовування рядів.

### Розділ 3. Подальші властивості голоморфних функцій.

#### Тема 8. Геометричні принципи теорії функцій.

1. Принцип аргументу.
2. Теореми Руше та Гурвіца.
3. Основна теорема алгебри.
4. Принцип збереження області.
5. Однолисті функції.
6. Обернення степеневих рядів.
7. Принцип максимуму модуля голоморфної функції.
8. Лема Шварца.

#### Тема 9. Властивості цілих та мероморфних функцій.

1. Означення цілих та мероморфних функцій.
2. Раціональні функції.
3. Розвинення Міттаг-Леффлера для мероморфних функцій.
4. Метод Коші розвинення для мероморфних функцій.
5. Каноничний множник Вейерштрасса.
6. Нескінчений добуток та його властивості.
7. Теореми Вейерштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченний добуток.

### Розділ 4. Конформні відображення та їх застосування.

#### Тема 10. Елементарні конформні відображення.

1. Означення конформного відображення.
2. Необхідні та достатні умови конформності.
3. Дробово-лінійні відображення та їх властивості.
4. Функції  $z^n$ ,  $\sqrt[n]{z}$  та їх властивості.
5. Функції  $e^z$ ,  $\ln z$  та їх властивості.
6. Властивості функції Жуковського та оберненої до неї.
7. Побудова конформних відображення однозв'язних областей за допомогою основних функцій: дробово-лінійної,  $z^n$ ,  $\sqrt[n]{z}$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ , функції Жуковського та оберненої до неї.

#### Тема 11. Основна теорема теорії конформних відображень.

1. Конформні автоморфізми та ізоморфізми.
2. Зв'язок між конформністю та голоморфністю для відображень.
3. Класи конформно-еквівалентних областей.
4. Теорема Пенлеве про зникнення особливостей.
5. Принцип симетрії Рімана-Шварца.

#### Тема 12. Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень

1. Задача Діріхле для круга. Формула Пуасона.
2. Задача Діріхле для однозв'язних областей.
3. Розв'язання задачі Діріхле для верхньої напівплощини.

## 4. Формула Крістофеля-Шварца.

## 3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	денна форма						заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
л		п	лаб.	інд.	с. р.	л		п	лаб.	інд.	с. р.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1. Основні поняття комплексного аналізу.</b>												
Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.	18	6	2			10						
Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції	18	6	2			10						
Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	18	6	2			10						
Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування	12	6	2			4						
<i>Контрольна робота</i>	2		2									
<b>Разом за розділом 1</b>	<b>68</b>	<b>24</b>	<b>10</b>			<b>34</b>						
<b>Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.</b>												
Тема 5. Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	14	6	4			4						
Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	16	6	4			6						
Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.	34	6	8			20						
<i>Колоквіум</i>	2		2									
<b>Разом за розділом 2</b>	<b>66</b>	<b>18</b>	<b>18</b>			<b>30</b>						
<b>Розділ 3. Подальші властивості голоморфних функцій.</b>												
Тема 8. Геометричні принципи теорії функцій	14	6	2			6						
Тема 9. Властивості цілих та мероморфних функцій.	12	6	2			4						
<b>Разом за розділом 3</b>	<b>26</b>	<b>12</b>	<b>4</b>			<b>10</b>						
<b>Розділ 4. Конформні відображення та їх застосування.</b>												

Тема 10. Елементарні конформні відображення.	36	6	10			20					
Тема 11. Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	12	4	4			4					
<i>Контрольна робота</i>	2		2								
<b>Разом за розділом 4</b>	<b>50</b>	<b>10</b>	<b>16</b>			<b>24</b>					
<b>Усього годин</b>	<b>210</b>	<b>64</b>	<b>48</b>			<b>98</b>					

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

##### Семестр 5.

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексна площа та функції комплексної змінної.	2
2	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції.	2
3	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші	2
4	Інтегральна формула Коші та її застосування	2
5	Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	2
6	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	2
7	Застосування теореми Коші про лишки (простіші приклади)	2
8	Контрольна робота	2
9	Колоквіум	2
	<b>Разом</b>	<b>18</b>

##### Семестр 6.

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Застосування теореми Коші про лишки (подальші приклади).	10
2	Геометричні принципи теорії функцій.	2
3	Властивості цілих та мероморфних функцій	2
4	Елементарні конформні відображення.	14
5	Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	2
6	Контрольна робота	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

#### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
	Робота над розрахунково-графічними роботами та над домашніми завданнями протягом семестрів, що відповідають темам практичних занять:	
1	Комплексна площа та функції комплексної змінної (Розрахунково-графічна робота).	10
2	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції	10



3	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	10
4	Інтегральна формула Коші та її застосування.	4
5	Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	4
6	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки (Домашнє завдання).	6
7	Застосування теореми Коші про лишки.	20
8	Геометричні принципи теорії функцій (Домашнє завдання).	6
9	Властивості цілих та мероморфних функцій	4
10	Елементарні конформні відображення (Домашнє завдання)	20
11	Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень (Розрахунково-графічна робота)	4
<b>Разом</b>		<b>98</b>

### 6. Індивідуальні завдання

розрахунково-графічні роботи (5 сем. – 1; 6 сем. – 1).

### 7. Методи навчання

Лекції та практичні заняття проводяться аудиторно. У разі оголошення карантину, заняття проводяться аудиторно або дистанційно (за допомогою платформ ZOOM, MOODLE) відповідно до наказу ректора Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна).

### 8. Методи контролю

- облік відвідування аудиторних занять;
- перевірка виконання індивідуальних завдань (2) та контрольних робіт (2),
- коллоквіум
- підсумковий контроль (Залік, Екзамен).

### 9. Схема нарахування балів

#### Семестр 5

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Залік	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Коллоквіум	Разом		
3	2	3	2	20	40	70	30	100

#### Семестр 6

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Розділ 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Разом		
5	5	5	5	20	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

### Критерії оцінювання навчальних досягнень

**Поточний контроль** враховує активність під час практичних занять та правильність виконання домашніх завдань, за кожне з яких разом можна отримати до 4 балів.

**Перша контрольна робота** у першому семестрі полягає у розрахунку значення функції комплексного змінного в деякої точці або знаходження розв'язку деякого рівняння в комплексній площині. **Друга контрольна робота** в першому семестрі полягає у знаходженні типу ізольованої особливості та розрахунку лишка в цієї точці. **Перша контрольна робота** у другому семестрі полягає в знаходженні конформного відображення, що переводить задану область на площині в круг чи верхню напівплощину. Кожна з робіт оцінюється максимум у 20 балів відповідно до правильності та повноти розв'язання.

**Коллоквіум** передбачає письмову відповідь на два питання зі списку, який надається студентам. Питання включають теоретичний і практичний матеріал, який студенти вивчали протягом семестру. До кожного питання обов'язково наводити доведення, обґрунтування міркувань, пояснювальні приклади. Якщо теоретичний зміст питань не повністю розкритий або робота містить помилки, бал може бути знижений.

**Екзаменаційний білет** складається з двох теоретичних питань та однієї задачі. Кожне з теоретичних питань оцінюється максимум у 15 балів. Максимальну кількість балів можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то він отримує максимум 12 балів. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, він отримує максимум 5 балів. Максимальна оцінка за задачу складає 10 балів. Незначні арифметичні помилки, які якісно не вплинули на результат, не впливають на кількість балів.

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою	
Оцінка	Пояснення	
90 – 100	Відмінно	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані в повному обсязі, відмінна робота без помилок або з однією незначною помилкою.
70 – 89	Добре	Теоретичний зміст курсу освоєний цілком, практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, всі навчальні завдання, які передбачені програмою навчання, виконані, якість виконання жодного з них не оцінено мінімальним числом балів, деякі види завдань виконані з помилками, робота з декількома незначними помилками, або з однією – двома значними помилками.
50 – 69	Задовільно	Теоретичний зміст курсу освоєний не повністю, але прогалини не носять істотного характеру, необхідні практичні навички роботи з освоєним матеріалом в основному сформовані, більшість передбачених програмою навчання навчальних завдань виконано,

		деякі з виконаних завдань, містять помилки, робота з трьома значними помилками.
1–49	Незадовільно	Теоретичний зміст курсу не освоєно, необхідні практичні навички роботи не сформовані, всі виконані навчальні завдання містять грубі помилки, додаткова самостійна робота над матеріалом курсу не приведе до значимого підвищення якості виконання навчальних завдань, робота, що потребує повної переробки

### Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка за національною шкалою	
	для чотирирівневої шкали оцінювання	для дворівневої шкали оцінювання
90 – 100	відмінно	зараховано
70-89	добре	
50-69	задовільно	
1-49	незадовільно	не зараховано

## 10.Рекомендована література

### Базова література

1. B.V. Shabat, Introduction to complex analysis. V.1, American Mathematical Society, 1992
2. Lavrentev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of function of complex variable. 1987, 544 p.
3. Edward C. Titchmarsh. The Theory of Functions. Oxford University Press; 2nd edition (May 13, 1976)
- 4.Комплексний аналіз. Приклади і задачі. (за редакцією В.Г.Самойленка). КНУ ім.Т.Шевченка., 2010.

### Допоміжна література

1. M L.Alfors. Complex analysis. N.J.,”Kluver”, 1981.
2. M.A. Evgrafov. Analytic functions. Dover Publications; Translation edition (September 18, 2019)