

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор
з науково-педагогічної роботи
Олександр ГОЛОВКО



“ 30 ” серпня 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Чисельні методи лінійної алгебри

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти бакалавр

галузь знань 11- математика та статистика

спеціальність 113– прикладна математика
(шифр і назва)

освітня програма прикладна математика
(шифр і назва)

спеціалізація _____
(шифр і назва)

вид дисципліни за вибором
(обов'язкова / за вибором)

факультет математики і інформатики

2022 / 2023 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“29” серпня 2022 року, протокол № 7


РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

Ігнатович Світлана Юріївна, доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри Прикладної математики


Протокол від “29” серпня 2022 року №11

Завідувач кафедри Прикладної математики


(підпис) Валерій КОРОБОВ
(прізвище та ініціали)

Програму погоджено з гарантом освітньо-професійної програми (керівником проектної групи) Прикладна математика
назва освітньої програми

Гарант освітньо-професійної програми
(керівник проектної групи) Прикладна математика


(підпис) Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ
(прізвище та ініціали)

Програму погоджено науково-методичною комісією факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
назва факультету, для здобувачів вищої освіти якого викладається навчальна дисципліна

Протокол від “29” серпня 2022 року, протокол № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики


(підпис) Ольга АНОЩЕНКО
(прізвище та ініціали)

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Чисельні методи лінійної алгебри**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки

бакалавр

 (назва рівня вищої освіти)

спеціальності (напрямку) _____ **113 – Прикладна математика** _____
 спеціалізації _____

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни є надання майбутнім спеціалістам теоретичних знань та практичних навичок з наближеного розв'язання задач лінійної алгебри.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

1. Ознайомлення з методами розв'язання систем лінійних рівнянь.
2. Ознайомлення з методами пошуку власних значень і власних векторів матриць.
3. Ознайомлення зі способами оцінки коректності і ефективності методу.
4. Застосування мови Python для розв'язання практичних задач: розв'язання систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень і власних векторів матриць.

1.3. Кількість кредитів 4

1.4. Загальна кількість годин 120

| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни | |
|---|-------------------------------------|
| За вибором | |
| Денна форма навчання | Заочна (дистанційна) форма навчання |
| Рік підготовки | |
| 2-й | |
| Семестр | |
| 4-й | |
| Лекції | |
| 32 год. | . |
| Практичні, семінарські заняття | |
| 32 год. | . |
| Лабораторні заняття | |
| | |
| Самостійна робота | |
| 56 год. | . |
| в тому числі: індивідуальне завдання | |

1.6. Заплановані результати навчання

Знати :

1. Методи точного і наближеного розв'язання систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень і власних векторів матриць.
2. Основи синтаксису і особливості мови Python, основи роботи з бібліотеками Numpy, Scipy.

Вміти:

1. Застосувати чисельний метод для знаходження розв'язку заданої систем лінійних рівнянь і знаходження власних значень і власних векторів заданої матриці, довести збіжність, оцінити похибку, оцінити обчислювальну складність.
2. Написати програму мовою Python, яка реалізує запропонований алгоритм.

2. Тематичний план навчальної дисципліни.

Розділ 1. Системи лінійних рівнянь

Тема 1. Прямі методи.

Метод Гауса і його модифікації (вибір головного елемента, метод прогонки для тридіагональних матриць). LU-розвинення. Обчислювальна складність методу Гауса. Знаходження оберненої матриці, рангу матриці, визначника.

Тема 2. Похибки, їх накопичення.

Точні і наближені значення. Формат запису чисел: цілі числа, числа з фіксованою та плаваючою комою. Стандарт IEEE-754. Поняття та властивості похибки. Нев'язка. Наближена оцінка похибки. Число обумовленості матриці.

Тема 3. Ітераційні методи.

Стискаючі відображення, теорема Банаха, метод простої ітерації. Діагональне переважання, метод Якобі. Метод Зейделя. Швидкість збіжності методів. Порівняння ітераційних і прямих методів при розв'язанні прикладних задач. Випадок додатно визначених матриць і метод спуску.

Тема 4. Бібліотеки наукових обчислень NumPy і SciPy.

Масиви ndarray, їх створення, особливості і використання (застосування фільтрів, змінення форми, особливості копіювання, багатовимірні масиви, операції над масивами, використання масивів для візуалізації). Модуль Timeit, визначення часу виконання фрагментів програми.

Розділ 2. Власні значення і власні вектори

Тема 5. Характеристичний поліном і локалізація спектра.

Метод Лервер'є-Фаддеева знаходження характеристичного полінома. Локалізація спектра матриці, круги Гершгоріна. Спектр деяких матриць спеціального вигляду. Канонічні форми матриць.

Тема 6. Методи розв'язання проблеми власних значень.

Степеневий метод знаходження максимального за моделям власного значення. Ортогоналізація Грама-Шмідта, QR-розвинення матриці, метод Хаусхолдера. QR-алгоритм розв'язання повної проблеми власних значень. Зведення матриці до форми Хессенберга методом Хаусхолдера.

3. Структура навчальної дисципліни

| Назви модулів і тем | Кількість годин | | | | | |
|---|-----------------|--------------|---|-----|-----|----|
| | Денна форма | | | | | |
| | Усього | у тому числі | | | | |
| | | л | п | лаб | інд | ср |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Розділ 1. Системи лінійних рівнянь | | | | | | |

| | | | | | | |
|--|------------|-----------|-----------|--|--|-----------|
| Тема 1. Прямі методи | 16 | 4 | 4 | | | 8 |
| Тема 2. Похибки, їх накопичення | 16 | 4 | 4 | | | 8 |
| Тема 3. Ітераційні методи | 24 | 8 | 8 | | | 8 |
| Тема 4. Бібліотеки наукових обчислень NumPy і SciPy | 10 | 2 | 2 | | | 6 |
| Разом за розділом 1 | 66 | 18 | 18 | | | 30 |
| Розділ 2. Власні значення і власні вектори | | | | | | |
| Тема 5. Характеристичний поліном і локалізація спектра | 18 | 4 | 4 | | | 10 |
| Тема 6. Методи розв’язання проблеми власних значень | 34 | 10 | 8 | | | 16 |
| Контрольна робота | 2 | | 2 | | | |
| Разом за розділом 2 | 44 | 14 | 14 | | | 26 |
| Усього годин | 120 | 32 | 32 | | | 56 |

4. Темі практичних занять

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|-------|--|-----------------|
| 1 | Матриці і вектори, операції з ними. Метод Гауса, розрахункові формули. | 2 |
| 2 | Метод Гауса з вибором головного елемента по рядку і по стовпцю. Знаходження оберненої матриці, рангу матриці, визначника. | 2 |
| 3 | Поняття та властивості похибки. Нев’язка. Наближена оцінка похибки. | 2 |
| 4 | Точні і наближені значення. Формати запису чисел. | 2 |
| 5 | Поняття ітераційного методу, приклади. | 2 |
| 6 | Метод простих ітерацій розв’язання систем лінійних рівнянь. | 2 |
| 7 | Метод Зейеля розв’язання систем лінійних рівнянь. | 2 |
| 8 | Методи спуску. | 2 |
| 9 | Бібліотеки Python для наукових розрахунків. | 2 |
| 10 | Оцінка часу виконання програм. | 2 |
| 11 | Спектр матриці. Слід матриці і метод Левер’є-Фаддєєва знаходження характеристичного полінома. | 2 |
| 12 | Локалізація спектра, круги Гершгоріна. | 2 |
| 13 | Степеновий метод знаходження максимального за моделям власного значення і його застосування до задачі ранжування сторінок. | 2 |
| 14 | Ортогоналізація Грама-Шміда, QR-розвинення матриці, метод Хаусхолдера. | 2 |
| 15 | QR-алгоритм розв’язання повної проблеми власних значень. Зведення матриці до форми Хессенберга методом Хаусхолдера. | 2 |
| 16 | Контрольна робота | 2 |
| | Разом | 32 |

5. Завдання для самостійної роботи

| № з/п | Види, зміст самостійної роботи | Кількість годин |
|-------|---|-----------------|
| 1 | Виконання домашнього завдання: ознайомитися з необхідними засобами мови Python і написати програму, що реалізує різні операції з матрицями. | 6 |
| 2 | Виконання домашніх завдань з прямих методів розв’язання систем лінійних рівнянь: дописати і удосконалити програми з реалізації методів Гауса (без вибору і з вибором головного елемента), LU-розвинення, знаходження оберненої матриці і визначника, аналізу похибок. | 6 |
| 3 | Повторення необхідних для подальшого матеріалів з лінійної алгебри | 4 |

| | | |
|----|--|-----------|
| | (матричні норми, окремі класи матриць і їх властивості). | |
| 4 | Виконання домашнього завдання: ознайомитися з поняттям числа з рухомою комою і стандартом IEEE754, навчитися записувати числа у цьому форматі. | 4 |
| 5 | Виконання домашніх завдань з ітераційних методів розв'язання систем лінійних рівнянь: дописати і удосконалити програми з реалізації методів простої ітерації, Зейделя, спуску, релаксації, аналізу швидкості збіжності і похибок. | 6 |
| 6 | Виконання домашніх завдань: ознайомитися з деякими можливостями бібліотек наукових обчислень NumPy і SciPy, у тому числі з типами даних і методами модулів, що призначені для розв'язання задач лінійної алгебри, написання демонстраційних програм і аналіз модельних прикладів. | 6 |
| 7 | Повторення необхідних для подальшого відомостей з лінійної алгебри (спектр, характеристичний і мінімальний поліном, власні та кореневі вектори, діагоналізованість, Жорданова форма). | 4 |
| 8 | Виконання домашніх завдань із властивостей спектру матриці і методів його локалізації: застосування методу Левер'є-Фаддєєва, побудова кругів Гершгоріна. | 6 |
| 9 | Виконання домашніх завдань зі знаходження власних значень і власних векторів матриць: дописати і удосконалити програми з реалізації деяких точних і ітераційних методів (QR-розвинення, метод Хаусхолдера. QRалгоритм розв'язання повної проблеми власних значень, зведення матриці до форми Хессенберга методом Хаусхолдера), аналізу швидкості збіжності і похибок, порівняння з розв'язанням вбудованими методами бібліотеки SciPy. | 8 |
| 10 | Підготовка до написання контрольної роботи, повторення теоретичного матеріалу, підготовка до екзамену. | 6 |
| | Разом | 56 |

6. Індивідуальне завдання

Не передбачене.

7. Методи навчання

Методи навчання: частково-пошуковий, пояснювально-ілюстративний. Студенти опановують значну частину теоретичного матеріалу шляхом самостійного написання комп'ютерних програм.

8. Методи контролю

1. Перевірка виконання домашніх завдань
2. Поточне опитування
3. Перевірка контрольної роботи
4. Перевірка екзаменаційної роботи

9. Схема нарахування балів

| Поточний контроль, самостійна робота | | | | Екзамен | Сума |
|--------------------------------------|----------|--|------|---------|------|
| Розділ 1 | Розділ 2 | Контрольна робота, передбачена навчальним планом | Сума | | |
| T1–T4 | T5–T6 | | | | |
| 25 | 25 | 10 | 60 | 40 | 100 |

T1 – T6 – теми розділів.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Контрольна робота: для даної матриці 4x4 (а) локалізувати спектр методом кругів Гершгоріна, (б) застосувати один із вивчених ітераційних методів знаходження спектру, виконати кілька кроків (вручну або з використанням комп'ютерної програми) і порівняти отримані результати. Максимальна оцінка за контрольну роботу – 10 балів. Пункт (а) оцінюється в 0-3 бали, пункт (б) оцінюється у 0-7 балів у залежності від повноти і правильності виконання.

Екзамен. Програма екзамену складається з двох частин: (А) письмова відповідь на теоретичне питання і письмове розв'язання задачі; (Б) створення програми на мові Python. Максимальна оцінка за екзамен – 40 балів. Частина (А): теоретичне питання – 0-15 балів, задача – 0-10 балів. Частина (Б): 0-15 балів. Для отримання екзаменаційної оцінки бали, отримані за виконання пунктів (А) і (Б), додаються.

Шкала оцінювання: чотирирівнева

| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка |
|---|--------------|
| 90 – 100 | відмінно |
| 70-89 | добре |
| 50-69 | задовільно |
| 1-49 | незадовільно |

10. Рекомендована література

Основна література

- С. Шахно. Чисельні методи лінійної алгебри. Львів, 2006.
- С. М. Шахно, А. Т. Дудикевич, С. М. Левицька. Практикум з чисельних методів. Львів, 2009.
- І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк. Чисельні методи. Розв'язання задач лінійної алгебри та нелінійних рівнянь: лабораторний практикум. Київ, 2018.

Допоміжна література

- A. Greenbaum, T. Chartier. Numerical methods.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

- SciPy Lecture Notes, 2017: <https://scipy-lectures.org/>
- www.python.org
- <http://www.pythontutor.com>