Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

**А. С. Сохин**
**В. А. Скорик**

# МЕТОД СЕТОК РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Методическое пособие
по курсу “Методы вычислений”

Харьков – 2014

УДК 519.633(075.8)
ББК 22.193я73
С 68

**Рецензенты:** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом радиофизической интроскопии ИРЭ НАН Украины **С. А. Масалов**;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и программного обеспечения Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **А. П. Приходько**.

*Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 3 от 19.12.2013)*

С 68 **Сохин А. С.** Метод сеток решения уравнений параболического типа : методическое пособие по курсу “Методы вычислений” / А. С. Сохин, В. А. Скорик. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 24 с.

Данное пособие посвящено решению начально-граничных задач для уравнений параболического типа методом сеток по разностным схемам обычной и повышенной точности. Помимо освещения абстрактных результатов, представленных в виде лемм и теорем, описываются конкретные алгоритмические, способствующие системному подходу в предметном комплексе курсов механико-математического профиля. Пособие будет полезным студентам механико-математического факультета как в теоретическом, так и в практическом плане.

УДК 519.633(075.8)
ББК 22.193я73

# Содержание

# Введение

Данное пособие посвящено применению метода сеток для численного решения начально-граничных задач для уравнений параболического типа по разностным схемам обычной и повышенной точности. В методическом пособии приводится общая схема построения сеточных методов. Для уравнения теплопроводности представляются наглядные схемы-шаблоны аппроксимации дифференциальных операторов, изучаются основные свойства представленных систем разностных уравнений. Результаты сформулированы в виде лемм и теорем, которые снабжены подробными доказательствами. Наряду с этим описываются конкретные алгоритмы, которые способствуют системному подходу в предметном комплексе курса “Методы вычислений” и способствуют лучшей усваиваемости студентами теоретического материала и его практического применения.

Рассмотрим задачу решения уравнения параболического типа в достаточно общей постановке: найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{P}(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = f(t,x), \quad 0 < t < T < \infty, \ x \in \mathcal{B}, \tag{0.1}$$

где $\mathcal{B}$ — односвязная область в $p$-мерном евклидовом пространстве $E^p$ с достаточно гладкой границей $\partial\mathcal{B}$, переменная $t$ интерпретируется как время,

$$L(u) = E(u) + (b, \nabla u) + cu; \qquad E(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(e_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)$$

является эллиптическим дифференциальным оператором, то есть оператором, удовлетворяющим условию

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} e_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq d \sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha^2, \quad d > 0, \ \xi \in E^p,$$

$e_{\alpha\beta}$, $b_\alpha$, $c$, $f$ — достаточно гладкие функции переменных $t$, $x$, функция $c \le 0$ начальному условию

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in (\mathcal{B} + \partial\mathcal{B}) = \overline{\mathcal{B}} \tag{0.2}$$

и на границе $\partial\mathcal{B}$ области $\mathcal{B}$ одному из граничных условий:

$$\begin{aligned}
&u = g(t,x) && \text{(условие Дирихле)},\\
&\frac{du}{dn_E} = \nu(t,x) && \text{(условие Неймана)},\\
&\frac{du}{dn_E} + \mu(t,x)u = \nu(t,x) && \text{(условие Робена)}.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

Здесь $\varphi$, $g$, $\mu > 0$, $\nu$ — заданные на $\partial\mathcal{B}$ достаточно гладкие функции своих аргументов, $\dfrac{du}{dn_E} = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{p} e_{\alpha\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}\cos(n, x_\alpha)$ — производная по внешней нормали, $n$ — внешняя нормаль к $\partial\mathcal{B}$ в точке $x$. На разных частях границы могут быть заданы условия любого из трех указанных типов.

Далее рассмотрим подробно задачу с условием Дирихле. Не теряя общности, можем считать, что функция $g(t,x) = 0$. В противном случае делаем замену вида $u = v + \psi$, где $\psi$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $\psi|_{\partial\mathcal{B}} = g$. Тогда функция $v$ удовлетворяет уравнению (0.1) с правой частью, равной $f + L(\psi) - \partial\psi/\partial t$ и $v|_{\partial\mathcal{B}} = 0$.

Таким образом, рассмотрим задачу

$$\mathcal{P}(u) = f(t,x), \quad x \in \mathcal{B}, \;\; t > 0, \tag{0.4}$$

$$u = \varphi(x), \qquad x \in \overline{\mathcal{B}}, \;\; t = 0, \tag{0.5}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{B}, \;\; t > 0. \tag{0.6}$$

Опишем теперь общую схему метода сеток.

## 1. Общая схема метода сеток

Введем *временную* сетку узлов $\omega_\tau = \{t_j : \; t_j = j\tau, \; j = 1, \ldots, M\}$. Пусть имеем семейство координатных прямых

$$x_1 = i_1 h_1, \quad x_2 = i_2 h_2, \quad \ldots, \quad x_p = i_p h_p,$$

где $h_\alpha > 0$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \ldots,$ для любого $\alpha = 1, \ldots, p$. Обозначим $h = (h_1, \ldots, h_p)$ — шаг сетки, $\overline{\omega_h}$ — множество точек пересечения координатных прямых, попавших внутрь или на границу области $\mathcal{B}$, и назовем его *пространственной* сеткой. Две точки назовем *соседними*, если расстояние между ними равно шагу сетки по любому координатному направлению. Точку сетки назовем *внутренней*, если у этой точки имеются две соседние точки по каждому координатному направлению. Множество внутренних точек обозначим через $\omega_h$. Оставшиеся невнутренние точки назовем *граничными* и обозначим $\partial\omega_h$.

Таким образом, имеем $\overline{\omega_h} = \omega_h + \partial\omega_h$. Сетку $\omega_h$ назовем *пространственной*, а сетку $\omega_{\tau,h} = \omega_\tau \times \omega_h$ — *пространственно-временной*.

Функцию, заданную в точках сетки, назовем *сеточной функцией*. Сеточная функция является функцией целочисленных переменных — номеров узлов сетки. Иногда удобно рассматривать сеточную функцию как вектор с соответствующей нумерацией его компонент несколькими индексами.

*Сеточным оператором* назовем операцию, ставящую в соответствие одной сеточной функции другую сеточную функцию. Удобно рассматривать сеточные операторы как линейные операторы в конечномерных пространствах.

При решении дифференциальной задачи методом сеток возникают следующие задачи:

1) переход от дифференциального уравнения к разностному (сеточному) уравнению — к линейным алгебраическим связям значений некоторой заданной на сетке функции, интерпретируемой как приближенное решение дифференциальной задачи (*дискретизация* дифференциальной задачи);

2) переход к сеточной задаче должен быть таким, чтобы имела место *аппроксимация* дифференциальной задачи разностной задачей;

3) *устойчивость* сеточной задачи, при наличии которой малые изменения заданных величин влекут малые изменения решения;

4) *сходимость* решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи при неограниченном убывании шагов сетки, являющаяся следствием аппроксимации и устойчивости;

5) так как сеточные уравнения — это системы линейных алгебраических высокой размерности, то требуются *рациональные методы* решения таких уравнений. На величину отклонения решения сеточного уравнения от решения дифференциального уравнения влияют погрешность приближения сеточным уравнением дифференциального уравнения, погрешность приближения граничных условий, погрешность решения сеточных уравнений.

Рассмотрим общую схему решения этих задач. Введем некоторые обозначения. Пусть $u$ — сеточная функция на $\omega_{\tau,h}$, т. е. $u = u_i^j$, где $j$ — номер слоя, $i = (i_1, \ldots, i_p)$ — составной номер узла. Обозначим через $\widehat{u} = u^{j+1}$ значение сеточной функции на верхнем слое, $u_t = (\widehat{u} - u)/\tau$ — разностную производную по времени, через

$$\overset{\circ}{x}_\alpha = \frac{u_{\boldsymbol{\cdot}, i_\alpha+1, \boldsymbol{\cdot}} - u_{\boldsymbol{\cdot}, i_\alpha-1, \boldsymbol{\cdot}}}{2h_\alpha}, \quad u_{x_\alpha} = \frac{u_{\boldsymbol{\cdot}, i_\alpha+1, \boldsymbol{\cdot}} - u_{\boldsymbol{\cdot}, i_\alpha, \boldsymbol{\cdot}}}{h_\alpha},$$
$$u_{\overline{x}_\alpha} = \frac{u_{\boldsymbol{\cdot}, i_\alpha, \boldsymbol{\cdot}} - u_{\boldsymbol{\cdot}, i_\alpha-1, \boldsymbol{\cdot}}}{h_\alpha}$$

обозначим разностные производные первого порядка по переменной $x_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$, где символом “$\boldsymbol{\cdot}$” обозначены текущие неизменные индексы. Поставим в соответствие дифференциальной задаче (0.4)–(0.6) сеточную задачу

$$\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u) \equiv u_t + A_h(\sigma\widehat{u} + (1-\sigma)u) = f \quad \text{на} \quad \omega_{\tau,h}, \tag{1.1}$$

$$u^0 = \varphi \quad \text{на} \quad \omega_h, \tag{1.2}$$

$$\widehat{u} = 0 \quad \text{на} \quad \omega_\tau \times \partial\omega_h, \tag{1.3}$$

где

$$A_h u = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} (e_{\alpha\beta} u_{\overline{x}_\alpha})_{x_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{p} b_\alpha u_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - cu,$$

$e_{\alpha\beta}$, $b_\alpha$, $c$, $f$ — заданные на сетке $\omega_{\tau,h}$ функции, $\sigma$ — вещественный параметр. Сеточную задачу (1.1)–(1.3) легко получить, заменяя формально производные в задаче (0.4)–(0.6) на соответствующие разностные производные.

Введем в рассмотрение пространство сеточных функций

$$\overset{\circ}{\Omega}_h = \Big\{ v_i : \ v_i = 0, \ i \in \partial N_h, \quad \|v\| = \max_{i \in N_h} |v_i| \quad \text{или}$$

$$\|v\| = \Big( \sum_{i \in N_h} |v_i|^2 h_1 \dots h_p \Big)^{1/2} \Big\},$$

где $\partial N_h$ — множество индексов граничных точек $\partial\omega_h$, $N_h$ — множество индексов точек сетки $\omega_h$. Запишем уравнение (1.1) в форме

$$R_h u_t + A_h u = f,$$

где $R_h = I + \sigma\tau A_h$, из которой следует форма уравнения вида

$$R_h u^{j+1} = (R_h - \tau A_h) u^j + \tau f^j \text{ на } \omega_h, \ u^{j+1} \in \overset{\circ}{\Omega}_h, \ j = 0, 1, \dots, \tag{1.4}$$

$$u^0 = \varphi \quad \text{на} \quad \omega_h, \tag{1.5}$$

в котором явно записаны номера слоев. Уравнение (1.4) представляет собой линейную алгебраическую связь между значениями сеточной функции на двух соседних слоях и называется *двухслойным уравнением*. Если сеточный оператор $R_h$ обратим, т. е. уравнение (1.4) при каждом $j$ имеет единственное решение $u^{j+1}$, то система (1.4)–(1.5) позволяет находить сеточную функцию $u_i^j$ по слоям — слой за слоем, поскольку на нулевом слое сеточная функция известна. Заметим, что задача решения уравнения (1.4) на каждом слое может оказаться весьма трудоемкой. При $\sigma = 0$ оператор $R_h = I$ и решение на верхнем слое непосредственно находится через решение на нижнем слое. Сеточное уравнение при $\sigma = 0$ назовем *явным*, а при $\sigma \neq 0$ назовем *неявным*.

Пусть $\overline{u}$ — решение дифференциальной задачи (0.4)—(0.6) на сетке $\omega_{\tau,h}$. Рассмотрим невязку $\varepsilon_{\tau,h}$ уравнения (1.4) на сеточной функции $\overline{u}$, т. е.

$$\varepsilon_{\tau,h} \equiv \mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(\overline{u}) - f.$$

Если $\varepsilon_{\tau,h} \to 0$ при $\tau, h \to 0$, то сеточное уравнение (1.4) *аппроксимирует* дифференциальное уравнение (0.6) по определению. Если

$$\|u^j\| \leq c(\|u^0\| + \max_{s=0,\dots,j-1} \|\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(u^s)\| \quad \text{для любого} \quad j = 1, 2, \dots,$$

где константа $c$ не зависит от $\tau$ и $h$, то сеточное уравнение (1.4) *устойчиво* в выбранной нормировке по слоям.

Оценим теперь отклонение решения дифференциальной задачи на сетке от решения сеточной задачи. Имеем

$$\|\overline{u} - u\| \le c(\|\overline{u}^0 - u^0\| + \max_{s=0,\dots,j-1} \|\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(\overline{u}) - \mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u)\| =$$

$$= c \max_{s=0,\dots,j-1} \|\varepsilon_{\tau,h}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \tau, h \to 0.$$

Таким образом, из *аппроксимации* и *устойчивости* следует *сходимость*.

## 2. Уравнение теплопроводности

В качестве модели уравнения параболического типа рассмотрим подробно простейшее уравнение теплопроводности в стержне конечной длины. Постановка дифференциальной задачи следующая.

Найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x), \quad 0 < t \le T < \infty, \ \ 0 < x < a, \tag{2.1}$$

начальному условию

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{2.2}$$

и одному из граничных условий:

$$\begin{aligned} u(t,0) &= \psi(t), \\ u(t,a) &= \theta(t), \end{aligned} \qquad \text{(условие Дирихле)} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} -u'(t,0) + \mu_0 u(t,0) &= \psi(t), \\ u'(t,a) + \mu_1 u(t,a) &= \theta(t), \end{aligned} \qquad \text{(условие Робена)} \tag{2.4}$$

где $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, $u(t,x)$ — температура стержня в точке $x$ в момент времени $t$, $F(t,x)$ — плотность источников тепла. Функции $F$, $\varphi$, $\psi$, $\theta$ будем называть входными (исходными) данными задачи.

## 2.1. Дискретизация

Введем пространственную сетку узлов

$$\omega_h = \{x_i : \ x_i = ih, \ i = 1, \ldots, n-1, \ h = a/n\}, \ \ \partial\omega_h = \{x_0, \ x_n\}$$

и временную сетку

$$\omega_\tau = \{t_j : \ t_j = j\tau, \ j = 0, \ldots, m, \ \tau = T/m\}, \ \ \partial\omega_\tau = \{t_0\}.$$

Обозначим пространственно-временную сетку узлов

$$\omega_{\tau,h} = \omega_\tau \times \omega_h = \{(t_j, x_i), \ j = 0, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, n{-}1\},$$

$$\partial\omega_{\tau,h} = \omega_\tau \times \partial\omega_h + \partial\omega_\tau \times \omega_h.$$

В точках сетки заменим $\partial u/\partial t$ и $\partial^2 u/\partial x^2$ соответственно разностными соотношениями

$$u_t \equiv \frac{u(t{+}\tau, x){-}u(t, x)}{\tau}, \quad u_{\bar{x}x} \equiv \Lambda u \equiv \frac{u(t, x{+}h){-}u(t, x){+}u(t, x{-}h)}{h^2}.$$

Чтобы получить сеточные уравнения различного качества, сопоставим дифференциальной задаче сеточную задачу, зависящую от параметра $\sigma \in [0, 1]$, такого вида (схема с весами)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u) \equiv \tfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \Lambda(\sigma u_i^{j+1} + (1-\sigma)u_i^j) = F_i^j, \\ j = 0, \ldots, m{-}1, \ i = 1, \ldots, n{-}1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Присоединим к этим равенствам еще уравнения, вытекающие из начального условия и граничных условий Дирихле:

$$u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{2.6}$$

$$u_0^{j+1} = \psi^{j+1}, \quad u_n^{j+1} = \theta^{j+1}, \quad j = 0, \ldots, m{-}1. \tag{2.7}$$

Следует ожидать, что алгебраическая задача (2.5)–(2.7) заменяет дифференциальную задачу и что решение алгебраической задачи является приближенным решением дифференциальной задачи в узлах сетки. Для краткости систему (2.5)–(2.7) запишем в виде

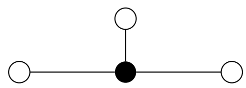
$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u) \equiv u_t - \Lambda^{(\sigma)}_h(u) = F \quad \text{на} \quad \omega_{\tau,h}, \\ &u = \mu \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\tau,h}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $F$ и $\mu$ — заданные сеточные функции, соответственно, на $\omega_{\tau,h}$ и $\partial\omega_{\tau,h}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи. В случае $\sigma = 0$ разностная схема имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{\overline{x}x} = F \quad \text{на} \quad \omega_{\tau,h},\\
&u = \mu \qquad\qquad\;\; \text{на} \quad \partial\omega_{\tau,h}.
\end{aligned}
$$

Шаблон состоит из четырех узлов, взаимное расположение которых изображается так:

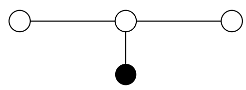


Символом “•” изображается точка сетки, в которой аппроксимируются производные уравнения линейной комбинацией значений функции в точках шаблона. Значения сеточной функции на верхнем слое выражаются через значения функции на нижнем слое по формулам

$$
\begin{aligned}
&u_i^{j+1} = \alpha u_{i-1}^j + (1-2\alpha)u_i^j + \alpha u_{i+1}^j + \tau F_i^j, \quad i = 1,\ldots,n-1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; j = 0,\ldots,m-1,\\
&u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0,\ldots,n,\\
&u_0^{j+1} = \psi^{j+1},\ u_n^{j+1} = \theta^{j+1},\ j = 0,\ldots,m-1,
\end{aligned}
$$

где $\alpha = \tau/h^2$. Так как значения функции в узлах сетки на нулевом слое известны, то можно определить решение на первом слое, затем на втором слое и так далее до $m$-го слоя явным образом. Сеточное уравнение при $\sigma = 0$ называется *явной двухслойной схемой*.

В случае $\sigma = 1$ шаблон имеет вид



В этом случае линейная комбинация значений функции в трех точках на верхнем слое выражается через значения функции на нижнем слое по формулам

$$
\begin{aligned}
&-\alpha u_{i-1}^{j+1} + (1+2\alpha)u_i^{j+1} - \alpha u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \tau F_i^j, \quad i = 1,\ldots,n-1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad j = 0,\ldots,m-1,\\
&u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0,\ldots,n,\\
&u_0^{j+1} = \psi^{j+1},\ u_n^{j+1} = \theta^{j+1},\ j = 0,\ldots,m-1.
\end{aligned}
$$

Для нахождения решения на каждом слое требуется решать систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, например, *методом прогонки*. Это сеточное уравнение называется *предельной неявной схемой*.

Заметим, что встречаются задачи, когда плотность источников $F$ распадается в сумму независимого источника $f$, линейной функции температуры и градиента температуры, т. е. имеет вид

$$F = pu' + qu + f, \quad q \le 0,$$

где $p$, $q$, $f$ — достаточно гладкие функции переменных $t$ и $x$. В этом случае функция $F$ аппроксимируется формулой $pu_{\overset{\circ}{x}} + qu + f$ на $\omega_{\tau,h}$.

## 2.2. Аппроксимация

Пусть $\overline{u}$ — решение дифференциальной задачи (2.1)–(2.3) на сетке $\omega_{\tau,h}$, $u$ — решение сеточной задачи (2.8). Тогда невязка $\varepsilon_{\tau,h} \equiv \mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(\overline{u}) - F$ называется *погрешностью аппроксимации* уравнения (2.1) уравнением (2.8). Сеточное уравнение (2.8) аппроксимирует уравнение (2.1), если $\varepsilon_{\tau,h} \to 0$ при $\tau, h \to 0$. Нетрудно видеть, что если решение задачи (2.1)–(2.3) достаточно гладкое, то

$$|\varepsilon_{\tau,h}| \le c_1(\tau + h^2),$$

при этом постоянная $c_1$ пропорциональна

$$c = \max\{\|\partial^2 u/\partial t^2\|_{C(T)},\ \|\partial^4 u/\partial x^4\|_{C(T)}\},$$

где $\|u\|_{C(T)} = \max\limits_{0\le t\le T} \max\limits_{0\le x\le a} |u(t,x)|$. Погрешность аппроксимации оценивается через степенные функции шагов сетки. Показатели степенных функций будем называть *порядками аппроксимации*.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2.1. *Сеточное уравнение (2.8) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.1) с первым порядком по временной переменной и со вторым порядком по пространственной переменной.*

## 2.3. Устойчивость

Введем обозначения

$$N_\omega = \{i, j:\ i = 1, \dots, n{-}1,\ j = 1, \dots, m\},$$

$$\|u\|_{\omega(T)} = \max_{i,j \in N_\omega} |u_i^j|, \quad \|u\|_{\partial\omega(T)} = \max_{i,j \in \partial N_\omega} |u_i^j|.$$

Лемма 2.1. *Сеточная функция*

$$z = a^2/8 - (ih - a/2)^2/2, \quad i = 0, \dots, n,$$

*обладает свойствами*

$$\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(z) = 1 \ \text{ на } \ \omega_{\tau,h}, \quad z \geq 0 \ \text{ на } \ \partial\omega_{\tau,h}.$$

Лемма 2.2 (принцип минимума). *Пусть функции* $F \geq 0$ *на* $\omega_{\tau,h}$ *и* $\mu \geq 0$ *на* $\partial\omega_{\tau,h}$. *Тогда решение задачи (2.8) является неотрицательной на* $\omega_{\tau,h}$ *функцией.*

*Доказательство.* Пусть $\delta > 0$ — произвольное малое число. Введем вспомогательную функцию $v = u + \delta z$. Тогда

$$\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(v) = F + \delta > 0 \ \text{ на } \ \omega_{\tau,h}, \quad v = \mu + \delta z \geq 0 \ \text{ на } \ \partial\omega_{\tau,h}.$$

Предположим, что сеточная функция $v$ принимает минимальное значение $v_{\min}$ на $\omega_{\tau,h}$. Пусть

$$\min_{\substack{i=1,\dots,n-1,\\ j=0,\dots,m-1}} v_i^{j+1} = v_{i^*}^{j^*+1} = v_{\min}.$$

Рассмотрим уравнение $\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(v) = F + \delta$ при $i = i^*$, $j = j^*$. Имеем

$$\tau\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(v_{i^*}^{j^*}) = -\sigma\alpha v_{i^*-1}^{j^*+1} + (1 + 2\sigma\alpha)v_{i^*}^{j^*+1} - \sigma\alpha v_{i^*+1}^{j^*+1} -$$

$$-(1-\sigma)\alpha v_{i^*-1}^{j^*} - (1 - 2(1-\sigma)\alpha)v_{i^*}^{j^*} - (1-\sigma)\alpha v_{i^*+1}^{j^*} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{1} (a_k v_{i^*+k}^{j^*+1} + b_k v_{i^*+k}^{j^*}) \equiv \tau(F_{i^*}^{j^*} + \delta),$$

где $\alpha = \tau/h^2$. Так как $v_{i^*}^{j^*+1} = v_{\min}$, то $-v_{i^*\pm1}^{j^*+1} \le -v_{\min}$, $-v_{i^*\pm1}^{j^*} \le -v_{\min}$. Предполагая, что $b_0 = 1-2(1-\sigma)\alpha \ge 0$, получаем условие $\alpha(1-\sigma) \le 1/2$.

Таким образом, имеем неравенства

$$0 < \tau(F_{i^*}^{j^*} + \delta) = \tau \mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(v_{i^*}^{j^*}) \le \sum_{k=-1}^{1} (a_k + b_k) v_{\min} = 0,$$

так как $\sum\limits_{k=-1}^{1} (a_k + b_k) = 0$. Полученное противоречие означает, что минимальное значение сеточная функция $v$ на сетке $\omega_{\tau,h}$ не принимает, т. е. минимальное значение функция $v$ принимает на $\partial\omega_{\tau,h}$ и это значение неотрицательное.

Таким образом, $v = u + \delta z \ge 0$ на сетке $\omega_{\tau,h}$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем, что $u \ge 0$ на $\omega_{\tau,h}$.

Лемма 2.3. *Система уравнений*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(u) = F \quad \textit{на} \quad \omega_{\tau,h}, \\ &u = \mu \qquad\qquad \textit{на} \quad \partial\omega_{\tau,h} \end{aligned} \tag{2.9}$$

*имеет единственное решение.*

*Доказательство.* Для доказательства справедливости этой леммы достаточно убедится, что однородная система $\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(\pm v) = 0$ на $\omega_{\tau,h}$, $\pm v = 0$ на $\partial\omega_{\tau,h}$ имеет только нулевое решение. Действительно, по лемме 2.2 функция $\pm v \ge 0$ на сетке, что означает $v = 0$ на сетке.

Теорема 2.2. *При условии $\alpha(1-\sigma) \le 1/2$ система уравнений (2.9) удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\omega(T)} \le \|\mu\|_{\partial\omega(T)} + c\|F\|_{\omega(T)}, \tag{2.10}$$

*где постоянная $c > 0$ не зависит от $\tau$ и $h$.*

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\pm v = \pm u + \|\mu\|_{\partial\omega(T)} + \|F\|_{\omega(T)} z.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(\pm v) = \pm F + \|F\|_{\omega(T)} \ge 0 \qquad \text{на} \quad \omega_{\tau,h}, \\ &\pm v = \pm\mu + \|\mu\|_{\partial\omega(T)} + z\|F\|_{\omega(T)} \ge 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\tau,h}. \end{aligned}$$

По лемме 2.2, функции $\pm v \geq 0$ на $\omega_{\tau,h}$, что означает

$$\pm u \leq \|\mu\|_{\partial\omega(T)} + z\|F\|_{\omega(T)}.$$

Так как $z \leq c = a^2/8$, то

$$\|u\| \leq \|\mu\|_{\partial\omega(T)} + c\|F\|_{\omega(T)}.$$

Заметим, что в случае $\sigma = 0$ — явная схема является устойчивой при $\tau \leq h^2/2$, а в случае $\sigma = 1$ — предельная неявная схема является безусловно устойчивой.

Следствие 2.1. *В теореме 2.2 об устойчивости неравенство (2.10) может быть записано в форме*

$$\|u\|_{\omega(T)} \leq \|u\|_{\partial\omega(T)} + c\|\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u)\|_{\omega(T)}.$$

## 2.4. Сходимость

Ранее было показано, как из аппроксимации и устойчивости следует сходимость. Пусть $\overline{u}$ — решение дифференциальной задачи на $\omega_{\tau,h}$, $u$ — решение сеточной задачи. Тогда при достаточной гладкости решения дифференциальной задачи имеем

$$\|\overline{u} - u\|_{\omega(T)} \leq c\|\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(\overline{u}) - \mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u)\|_{\omega(T)} =$$
$$= c\|\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(\overline{u}) - F\|_{\omega(T)} = c\|\varepsilon_{\tau,h}\|_{\omega(T)} \leq c_3(\tau + h^2).$$

Отсюда вытекает, что следует полагать $\tau = O(h^2)$, чтобы иметь сходимость второго порядка точности.

Теорема 2.3 (об устойчивости с нормировкой на слое). *Пусть сеточная функция на каждом слое удовлетворяет условию $u^j = 0$ на $\partial\omega_h$. Пусть $\|u^j\|_{\omega_h}$ означает одну из трех норм, определяемых выражениями*

$$\max_{i=0,\dots,n} |u^j_i|, \quad \sum_{i=0}^{n} |u^j_i| h, \quad \Big(\sum_{i=0}^{n} |u^j_i|^2 h\Big)^{1/2}.$$

*Тогда для $j = 1, 2, \dots$ имеем неравенство*

$$\|u^j\|_{\omega_h} \leq \|u^0\|_{\omega_h} + \sum_{s=0}^{j-1} \tau\|F^s\| = \|u^0\|_{\omega_h} + \sum_{s=0}^{j-1} \tau\|\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u^s)\|_{\omega_h}. \qquad (2.11)$$

*Доказательство.* Из сеточного уравнения (2.8) имеем равенство

$$(1+2\sigma\alpha)\widehat{u}=\alpha\sigma\widehat{u}_{-}+\alpha\sigma\widehat{u}_{+}+(-2\alpha(1-\sigma))u+\alpha(1-\sigma)u_{-}+\alpha(1-\sigma)u_{+}+\tau F,$$

где $u_{\pm} = u_{i\pm1}$. Так как $\|u_{\pm}\|_{\omega_h} = \|u\|_{\omega_h}$, то требуя выполнения неравенства $1-2\alpha(1-\sigma) \geq 0$, получаем $\|\widehat{u}\|_{\omega_h} \leq \|u\|_{\omega_h}+\tau\|F\|_{\omega_h}$, из которого следует неравенство (2.11).

Неравенство (2.11) называется теоремой об устойчивости с нормировкой на слоях. Условие устойчивости имеет вид: $\alpha(1-\sigma) \leq 1/2$.

## 3. Сеточные уравнения повышенной точности

В настоящее время известны два подхода для получения более точных решений за один и тот же объем вычислений. Во-первых, решают обычную сеточную задачу при различных шагах сетки и составляют линейную комбинацию решений. Оказывается, что при определенных соотношениях шагов сетки линейная комбинация решений является более точным решением (схема Ричардсона). Во-вторых, составляют разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу более точно и сохраняющую структуру простой разностной задачи. Решение этой задачи является более точным приближенным решением дифференциальной задачи. Мы рассмотрим второй подход.

Дифференциальной задаче (2.1)–(2.3) поставим в соответствие сеточную задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(u) = \widetilde{F} \quad &&\text{на} \quad \omega_{\tau,h}, \\ &u = \mu &&\text{на} \quad \partial\omega_{\tau,h}. \end{aligned}$$

Параметр $\sigma \in (0,1)$ и сеточную функцию $\widetilde{F}$ выберем так, чтобы погрешность аппроксимации $\varepsilon_{\tau,h}$ имела вид

$$\varepsilon_{\tau,h} \equiv \mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(\overline{u}) - \widetilde{F} = O(\tau^2 + h^4),$$

где $\overline{u}$ — решение дифференциальной задачи на $\omega_{\tau,h}$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{P}^{(\sigma)}_{\tau,h}(\overline{u}) = \overline{u}_t - \overline{u}_{\overline{x}x} - \sigma\tau\overline{u}_{\overline{x}xt}.$$

Запишем разложения

$$\overline{u}_t = \dot{\overline{u}} + \frac{\tau}{2}\ddot{\overline{u}} + O_1(\tau^2), \quad \overline{u}_{\overline{x}x} = \overline{u}'' + \frac{h^2}{12}\overline{u}^{(4)} + O_2(h^4),$$

$$\overline{u}_{\overline{x}xt} = \dot{\overline{u}}'' + O_3(\tau + h^2).$$

Тогда

$$\varepsilon_{\tau,h} = -\widetilde{F} + F + \frac{\tau}{2}\ddot{\overline{u}} - \frac{h^2}{12}\overline{u}^{(4)} - \sigma\tau\dot{\overline{u}}'' + O(\tau^2 + h^4) \quad \text{на} \quad \omega_{\tau,h}.$$

Считая входные данные достаточно гладкими функциями, из дифференциального уравнения $\dot{\overline{u}} = \overline{u}'' + F$ путем дифференцирования получаем

$$\overline{u}^{(4)} = \dot{\overline{u}}'' - F'', \quad \ddot{\overline{u}} = \dot{\overline{u}}'' + \dot{F}. \tag{3.1}$$

Подставляя выражения $\overline{u}^{(4)}$ и $\ddot{\overline{u}}$ в формулу для $\varepsilon_{\tau,h}$, получаем

$$\varepsilon_{\tau,h} = -\widetilde{F} + F + \frac{\tau}{2}\dot{F} + \frac{h^2}{12}F'' + \left(\frac{\tau}{2} - \frac{h^2}{12} - \sigma\tau\right)\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4). \tag{3.2}$$

Дальнейшие оценки зависят от выбора параметров $\sigma$ и $\widetilde{F}$. Рассмотрим два случая:

1) положим $\sigma = \dfrac{1}{2}$, $\widetilde{F} = F + \frac{\tau}{2}\dot{F}$. Тогда из (3.2) получаем

$$\varepsilon_{\tau,h} = \frac{h^2}{12}(F'' - \dot{u}'') + O(\tau^2 + h^4) = O_4(\tau^2 + h^2);$$

2) пусть параметр $\sigma = \sigma_0 \equiv 1/2 - h^2/(12\tau)$ при котором выполняется равенство $\tau/2 - h^2/12 - \sigma\tau = 0$. Выберем $\widetilde{F}$ согласно равенству $\widetilde{F} = F + \dfrac{\tau}{2}\dot{F} + \dfrac{h^2}{12}F''$. Тогда из (3.2) получаем, что погрешность аппроксимации имеет вид $\varepsilon_{\tau,h} = O(\tau^2 + h^4)$.

Заметим, что для вычислений удобно в формулах для $\widetilde{F}$ заменить $\dot{F}$ на $(\widehat{F} - F)/\tau$ и $F''$ на $F_{\overline{x}x}$, изменив при этом $\widetilde{F}$ в первом случае на $O(\tau^2)$ и во втором случае на $O(\tau^2 + h^4)$, что не нарушает порядка аппроксимации, так что:

$$1)\ \ \widetilde{F} = (\widehat{F} + F)/\tau,$$

$$2)\ \ \widetilde{F} = (F_- + 4F + 6\widehat{F} + F_+)/12.$$

Условие устойчивости при $\sigma{=}1/2$ выполняется, если $\tau/h^2{\le}1$. Из условий $\sigma_0 \ge 0$ и $\tau(1-\sigma_0)/h^2 \le 1/2$ следует условие устойчивости схемы повышенной точности: $1/6 \le \tau/h^2 \le 5/6$. Заметим, что при $\tau/h^2 = 1/6$ схема повышенной точности является явной.

## 4. Каноническая форма двухслойной схемы

Заменой переменных нетрудно перейти к функции, которая равна нулю в граничных узлах сетки. А именно, введем функцию

$$v_i^j = u_i^j - \frac{ih}{a}\,\theta^j - \frac{a-ih}{a}\,\psi^j \equiv u - z,$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(v) = F - L_{\tau,h}^{(\sigma)}(z) && \text{на} \quad \omega_{\tau,h},\\
&v = \varphi - z^0 && \text{на} \quad \omega_h,\\
&v = 0 && \text{на} \quad \partial\omega_h.
\end{aligned}$$

Разностная схема называется *двухслойной*, если она связывает значения сеточной функции на двух соседних слоях. Общий вид двухслойной схемы такой:

$$A_1 u^{j+1} + A_2 u^j = F^j, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

где $u^0$ — известное значение функции на нулевом слое, верхний индекс указывает на номер слоя, $A_1$, $A_2$ — матрицы размерности $(n{-}1){\times}(n{-}1)$ или линейные операторы на конечномерном пространстве сеточных функций, равных нулю в граничных узлах сетки. Двухслойное сеточное уравнение, записанное в форме

$$B\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + Au^j = F^j, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

называется *каноническим*.

Введем гильбертово пространство сеточных функций

$$\overset{\circ}{\Omega}_h = \Big\{ z:\; z_0 = 0,\; z_n = 0,\; \|z\| = \Big(\sum_{i=0}^{n} z_i^2 h\Big)^{1/2} \Big\},$$

где $h = a/n$. Запишем в канонической форме неявное сеточное уравнение с весами, полученное при дискретизации одномерного уравнения теплопроводности. Обозначим

$$\Lambda u = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \equiv -Au \equiv u_{\bar{x}x}, \quad u_t = \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau},$$

тогда

$$\mathcal{P}_{\tau,h}^{(\sigma)}(u) \equiv (I + \sigma\tau A)u_t + Au = F.$$

Операторы $A$ и $B \equiv (I+\sigma\tau A)$ являются линейными, самосопряженными, положительно определенными операторами в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{\Omega}_h$ . В терминах операторов $A$ и $B$ можно сформулировать условие устойчивости при определенной нормировке на слое в различных сеточных пространствах.

# 5. Абстрактная двухслойная разностная (сеточная) схема

При изучении двухслойных схем удобно отвлечься от конкретного вида пространства сеточных функций, возникающих при дискретизации уравнения теплопроводности, и рассматривать двухслойную схему в абстрактном сеточном пространстве.

Рассмотрим абстрактную двухслойную разностную схему

$$B\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + Au^j = f^j, \quad u^j \in H, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{5.1}$$

где $u^0$ — известная функция, постоянная $\tau > 0$, $H = H_h$ — гильбертово пространство сеточных функций со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, зависящих от параметра $h$ — точкой другого гильбертового пространства. Величины $\tau$ и $h$ будем называть параметрами сетки. Операторы $A$ и $B$ — линейные, самосопряженные, положительно определенные операторы в пространстве $H$.

Если в (5.1) оператор $B = I$, то разностная схема называется *явной*, если же $B \neq I$, то схема называется *неявной*.

Выразим в схеме (5.1) $u^{j+1}$ через $u^j$, имеем

$$u^{j+1} = Su^j + \tau B^{-1} f^j, \quad j = 0, 1, \dots, \tag{5.2}$$

где оператор $S = I - \tau B^{-1} A$ называется *оператором перехода*.

Схема (5.1) называется *устойчивой* по начальным данным и правой части, если существует положительная постоянная $c$, не зависящая от параметров сетки $\tau$ и $h$, такая, что выполнено одно из неравенств:

$$\|u^j\| \leq c(\|u^0\| + \max_{0\leq s\leq j-1} \|f^s\|), \quad \|u^j\| \leq c(\|u^0\| + \tau \sum_{s=0}^{j-1} \|f^s\|).$$

Схема называется *условно (безусловно) устойчивой*, если есть устойчивость при определенных условиях (без всяких условий) на параметры сетки.

Теорема 5.1. *Для того, чтобы однородная схема (5.2) была устойчивой по начальным данным, необходимо и достаточно, чтобы* $\|S\| \leq 1$.

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что существует положительная константа $c$, такая, что выполнено неравенство $\|u^j\| \leq c\|u^0\|$, $j = 0, 1, \dots$. Отсюда на основании равенства $u^j = S^j u^0$ получаем, что $\|S^j\| \leq c$, $j = 0, 1, \dots$. В силу самосопряженности оператора $S$ имеем, что $\|S^j\| = \|S\|^j$ и, следовательно, получаем неравенство $\|S\|^j \leq c$, $j = 0, 1, \dots$, которое возможно при $\|S\| \leq 1$.

*Достаточность.* Пусть $\|S\| \leq 1$. Тогда имеем

$$\|u^j\| \leq \|S\|^j \|u^0\| \leq \|u^0\|.$$

Теорема 5.2. *Для устойчивости схемы (5.1) по начальным данным и правой части достаточно, чтобы* $\|S\| \leq 1 + c_0\tau$, *где постоянная* $c_0 \geq 0$.

*Доказательство.* Из равенства (5.2) получаем

$$u^j = S^j u^0 + \tau \sum_{s=0}^{j-1} S^{j-1-s} B^{-1} f^s.$$

Отсюда имеем

$$\|u^j\| \leq \|S^j\| \left( \|u^0\| + \tau \sum_{s=0}^{j-1} \|B^{-1}\| \|f^s\| \right).$$

Так как
$$\|S^j\| \le (1+c_0\tau)^j = \left((1+c_0\tau)^{\frac{1}{c_0\tau}}\right)^{c_0\tau j} < e^{c_0 j\tau},$$
то предполагая, что $c_0 > 0$, $j\tau \le T < \infty$, получаем, что $\|S^j\| \le e^{c_0 T}$. Если же $c_0 = 0$, то $\|S^j\| \le 1$.

Э н е р г е т и ч е с к о е  т о ж д е с т в о. Введем обозначения
$$\widehat{u} = u^{j+1}, \quad u^j = u, \quad u^{j-1} = \overset{\vee}{u}, \quad u_t = (\widehat{u} - u)/\tau, \quad f = f^j.$$
Умножим скалярно на $2\tau u_t = 2(\widehat{u} - u)$ двухслойное уравнение (5.1), имеем
$$2\tau(Bu_t, u_t) + 2\tau(Au, u_t) = 2\tau(f, u_t). \tag{5.3}$$
Заменив в (5.3) $u$ выражением $(\widehat{u}+u)/2 - (\widehat{u}-u)/2$ и использовав равенство
$$(A(\widehat{u}+u), \widehat{u}+u) = (A\widehat{u}, \widehat{u}) - (Au, u),$$
после приведения подобных членов приходим к энергетическому тождеству
$$2\tau((B - A\tau/2)u_t, u_t) + (A\widehat{u}, \widehat{u}) = (Au, u) + 2\tau(f, u_t). \tag{5.4}$$
Введем энергетическую норму на $j$-м слое:
$$\|u^j\|_A = (Au^j, u^j)^{\frac{1}{2}} = \left(A^{\frac{1}{2}}u^j, A^{\frac{1}{2}}u^j\right)^{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|,$$
если $A = A^* \ge \delta I$, $\delta > 0$. Нетрудно убедится, что для энергетической нормы выполнены все аксиомы для норм:

1) $\|u\|_A \ge 0, \quad \|u\|_A = 0 \ \Leftrightarrow\ u = 0$ (неотрицательность);

2) $\|\lambda u\|_A = |\lambda|\|u\|_A$ (однородность);

3) $\|u+v\|_A \le \|u\|_A + \|v\|_A$ (неравенство треугольника).

У с т о й ч и в о с т ь в энергетической норме на слое. Энергетическое тождество в обозначениях энергетической нормы имеет вид
$$2\tau([B - A\tau/2]u_t, u_t) + \|\widehat{u}\|_A^2 = \|u\|_A^2 + 2\tau(f, u_t).$$

Лемма 5.1. *Пусть ограниченный оператор* $C = C^* \geq 0$. *Тогда* $B^*CB \geq 0$.

*Доказательство.* $(B^*CBu, u) = (CBu, Bu) \geq 0$.

Лемма 5.2. *Пусть: 1) оператор* $C = C^* > 0$; *2)* $\|I - C\| \leq 1$; *3) оператор* $C^{-1}$ *является ограниченным. Тогда* $C^{-1} - 0.5I \geq 0$.

*Доказательство.* Так как $\|I - C\| \leq 1$, то $([I - C]u, [I - C]u) \leq 1$ для любой функции $u \in H$ такой, что $\|u\| = 1$. Отсюда получаем

$$\|u\|^2 - 2(Cu, u) + (Cu, Cu) \leq 1$$

и в силу $C = C^*$ имеем $((-2C + C^2)u, u) \leq 0$, т. е. $-2C + C^2 \leq 0$. Умножая последнее неравенство слева на $C^{-1}$ и справа на $(C^{-1})^* = C^{-1}$, получаем неравенство $-2C^{-1} + I \leq 0$, и, следовательно, $C^{-1} - \frac{1}{2}I \geq 0$.

Теорема 5.3. *Пусть $A$ и $B$ — линейные ограниченные самосопряженные положительно определенные операторы. Для того, чтобы однородная схема*

$$B\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + Au^j = 0, \quad u^j \in H, \quad j = 0, 1, \ldots$$

*удовлетворяла условию* $\|u^j\|_A \leq \|u^0\|_A$, *необходимо и достаточно, чтобы* $B - \tau A/2 \geq 0$.

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что $\|u^j\|_A \leq \|u^0\|_A$. Это означает, что $\|A^{1/2}u^j\| \leq \|A^{1/2}u^0\|$. Пусть $S = I - \tau B^{-1}A$ — оператор перехода, тогда $u^j = S^j u^0$. После подстановки этого в последнее неравенство получаем неравенство

$$\|(A^{1/2}S^jA^{-1/2})A^{1/2}u^0\| \leq \|A^{1/2}u^0\|,$$

которое означает, что $\|A^{1/2}S^jA^{-1/2}\| \leq 1$. В силу самосопряженности оператора $A^{1/2}S^jA^{-1/2}$ имеем

$$\|A^{1/2}S^jA^{-1/2}\| = \|(A^{1/2}SA^{-1/2})^j\| = \|(A^{1/2}SA^{-1/2})\|^j,$$

и, следовательно, $\|(A^{1/2}SA^{-1/2})\| \leq 1$. Подставляя вместо $S$ его выражение, получаем $\|I - \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\| \leq 1$. По лемме 5.2, имеем

$$\tau^{-1}A^{-1/2}BA^{-1/2} - I/2 \geq 0.$$

Умножая последнее равенство слева на $\tau A^{1/2}$ и справа на $A^{1/2}$, получаем $B - \tau A/2 \geq 0$.

*Достаточность.* Пусть $B - \tau A/2 \geq 0$. Тогда из энергетического тождества имеем $\|u^j\|_A \leq \|u^{j-1}\|_A$ и, следовательно, $\|u^j\|_A \leq \|u^0\|_A$.

Достаточное условие устойчивости по начальным данным и правой части дает следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть $A$ и $B$ — линейные ограниченные самосопряженные положительно определенные операторы и $B - \tau A/2 \geq \delta I$, $\delta > 0$. Тогда*

$$\|u^j\|_A^2 \leq \|u^0\|_A^2 + \frac{\tau}{2\delta} \sum_{s=0}^{j-1} \|f^s\|^2, \quad j = 1, 2, \dots .$$

*Доказательство.* Скалярное произведение допускает оценку

$$|(f, u_t)| \leq \delta \|u_t\|^2 + \frac{1}{4\delta} \|f\|^2.$$

Из энергетического тождества имеем

$$2\tau([B - \tau A/2]\widetilde{u}_t, \widetilde{u}_t) + \|u\|_A^2 \leq \|\widetilde{u}\|_A^2 + 2\tau\delta\|\widetilde{u}_t\|^2 + \frac{\tau}{2\delta}\|\widetilde{f}\|^2.$$

Так как $2\tau([B - \tau A/2]\widetilde{u}_t, \widetilde{u}_t) \geq 2\tau\delta\|\widetilde{u}_t\|^2$, то сопоставляя последние два неравенства, имеем неравенство

$$\|u^j\|_A^2 \leq \|u^{j-1}\|_A^2 + \frac{\tau}{2\delta}\|f^{j-1}\|^2, \quad j = 1, 2, \dots,$$

пользуясь которым как рекуррентным соотношением, получаем утверждение теоремы.

## Список использованной литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 616 с.

2. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

Навчальне видання

**Сохін** Анатолій Семенович

**Скорик** Василь Олександрович

**Метод сіток розв'язання рівнянь параболічного типу**

Методичний посібник з курсу "Методи обчислень"
(Рос. мовою)

Коректор *А. І. Сєдих*

Комп'ютерне верстання *В. О. Скорик*

Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 0,8. Тираж 50 пр. Зам. № 305/13.

---

Видавець і виготовлювач

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,

61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Тел. 705-24-32

---