Министерство образования и науки, молодёжи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

С. Ю. Игнатович
М. А. Голицина
Е. А. Плетнёва

Математический практикум

Методическое пособие по курсу
«Математический практикум»
для студентов 1 курса
механико-математического факультета

Харьков – 2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
И 53

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **Тарапова Е. И.;**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **Кабалянц П. С.**

Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 4 от 11.05.12 г.)

И 53 **Игнатович С. Ю.**

Математический практикум : Методическое пособие по курсу «Математический практикум» для студентов 1 курса механико-математического факультета / С. Ю. Игнатович, М. А. Голицина, Е. А. Плетнёва. — Харьков : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. – 48 с.

Цель данного пособия — помочь студентам первого курса систематизировать знания и умения по математике, полученные в школе, напомнить факты и методы решения элементарных задач, которые считаются известными студентам при изложении основных предметов на механико-математическом факультете.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Тема 1. Модуль действительного числа. Уравнения и неравенства с модулями

§1.1. Определение модуля

Определение. *Модулем действительного числа x называется число, определяемое следующим образом:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Замечание 1. Если представлять себе действительные чи́сла как точки на числовой оси, то

$$|x| \text{ — это расстояние от точки } x \text{ до точки } 0,$$

и вообще, для любого действительного числа a

$$|x - a| \text{ — это расстояние от точки } x \text{ до точки } a.$$

Замечание 2. Отметим одно свойство модуля, которое прямо следует из определения: для любых действительных чисел x и y выполнено равенство

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

В частности, отсюда следует равенство

$$|-x| = |x|.$$

Приведём примеры применения равенств из замечания 2. Для любого действительного числа x верно

1) $|2x| = 2|x|$;

2) $|2 - x| = |x - 2|$;

3) $|-3x - 1| = |3x + 1| = 3|x + \frac{1}{3}|$;

4) $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{|x|}{|x-1|}$ (при $x \neq 1$).

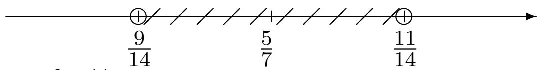
Эти замечания полезны при решении простых неравенств с модулем.

Пример 1. Решить неравенство $|5 - 7x| < \frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуем данное неравенство:

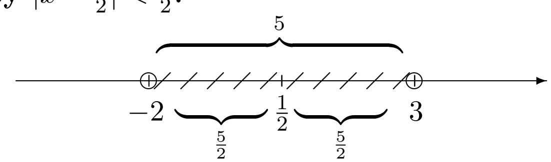
$$|5 - 7x| < \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 7|\tfrac{5}{7} - x| < \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; |\tfrac{5}{7} - x| < \tfrac{1}{14} \;\Leftrightarrow\; |x - \tfrac{5}{7}| < \tfrac{1}{14}.$$

Значит, неравенству удовлетворяют те и только те числа x, для которых расстояние до точки $\frac{5}{7}$ меньше $\frac{1}{14}$. Проиллюстрируем это на рисунке: отметим на числовой оси точку $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ и отложим от неё влево и вправо отрезки длиной $\frac{1}{14}$.

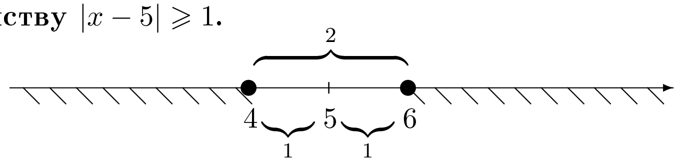


Ответ: $x \in (\frac{9}{14}; \frac{11}{14})$.

Из этого примера понятно, что каждый интервал или отрезок на числовой оси можно описать с помощью неравенства с модулем. Например, рассмотрим интервал $(-2; 3)$. Середина этого интервала — это точка $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$, а длина его равна $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$. Значит, интервал $(-2; 3)$ — это *все точки, которые находятся от точки* $\frac{1}{2}$ *на расстоянии меньшем, чем* $\frac{5}{2}$. То же самое можно записать так: **интервал $(-2; 3)$ состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2}$.**



Аналогично, неравенством с модулем можно записать *дополнение* к любому интервалу или отрезку. Например, множество $(-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$ (дополнение к интервалу $(4; 6)$) — это множество *всех точек, которые находятся от точки* 5 *на расстоянии не меньше, чем* 1. Поэтому его можно записать так: **множество $(-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$ состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x - 5| \geqslant 1$.**



Задачи для самостоятельного решения.

Решить неравенства **аналогично примеру 1**; ответ изобразить на числовой оси:

1.1. $|8x - 4| < 3$; **1.2.** $|6x + 1| \leqslant 7$; **1.3.** $|1 - 2x| > 9$.

Записать множество с помощью неравенства с модулем:

1.4. $[11; 24]$; **1.5.** $(-\infty; \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}; +\infty)$.

§1.2. Решение неравенств с модулями «методом интервалов»

Для решения неравенств с модулями можно применять метод интервалов. Рассмотрим его на примере.

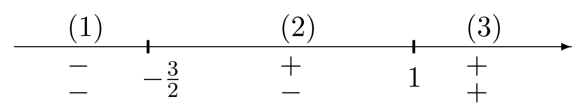
Пример 2. Решить неравенство $|2x+3|+|x-1|<5$.

Решение. 1) В выражении из левой части неравенства есть два слагаемых, содержащих модуль. Вначале найдём точки, в которых подмодульные выражения обращаются в ноль:

$$2x+3=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\tfrac{3}{2};$$
$$x-1=0 \;\Leftrightarrow\; x=1.$$

2) Отметим найденные точки на числовой оси.

Итак, вся числовая ось разбивается на три участка: левее точки $-\frac{3}{2}$, между точками $-\frac{3}{2}$ и 1 и правее точки 1. На каждом из этих участков функция может быть записана уже без знака модуля. Рассмотрим эти три участка, мысленно двигаясь по числовой оси слева направо:



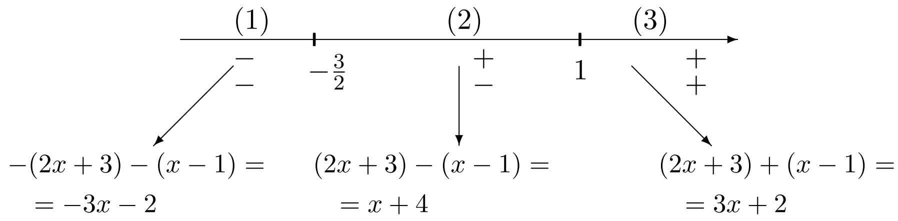
Рассмотрим, например, первый участок (на рисунке обозначен как (1)).

При $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$ получаем $2x+3<0$, то есть первый модуль раскрывается со знаком «минус»: $|2x+3| = -(2x+3)$. Поставим знак «минус» в первом интервале.

При $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$ получаем $x-1<0$, так что и второй модуль раскрывается со знаком «минус»: $|x-1| = -(x-1)$. Поставим ещё один знак «минус» в первом интервале.

Аналогично рассмотрим два остальных участка, и поставим знаки, которые означают, как раскрываются модули в этих интервалах (важно не перепутать, что означает каждый знак!)

3) Теперь будем решать неравенства на каждом из участков. Схема на рисунке напоминает, как раскрывать модули. Удобно выписать левую часть неравенства (уже без модулей) под каждым участком.



Итак, решаем неравенства на каждом участке.

Участок (1), на котором $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$:

$$-(2x+3)-(x-1) < 5 \Leftrightarrow -3x-2 < 5 \Leftrightarrow -3x < 7 \Leftrightarrow -x < \frac{7}{3} \Leftrightarrow x > -\frac{7}{3}.$$

Заметим, что $-\frac{7}{3} < -\frac{3}{2}$ (поскольку $\frac{7}{3} = \frac{14}{6} > \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$). Так как мы решали неравенство только на участке (1), то получаем, что в этом случае $x \in \left(-\frac{7}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

Участок (2), на котором $x \in [-\frac{3}{2}; 1]$ (в этот участок мы включили и точки $-\frac{3}{2}$ и 1):

$$2x+3-x+1 < 5 \;\Leftrightarrow\; x+4 < 5 \;\Leftrightarrow\; x < 1.$$

Так как мы решали неравенство только на участке (2), то получаем, что в этом случае $x \in [-\frac{3}{2}; 1)$.

Участок (3), на котором $x \in (1; +\infty)$:

$$2x+3+x-1 < 5 \;\Leftrightarrow\; 3x+2 < 5 \;\Leftrightarrow\; 3x < 3 \;\Leftrightarrow\; x < 1.$$

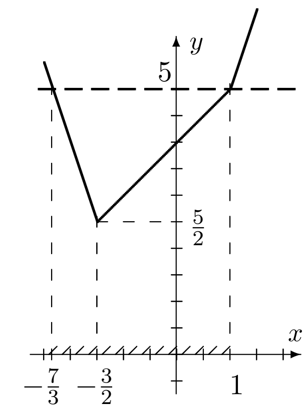
Так как мы решали неравенство только на участке (3), то получаем, что в этом случае неравенство не имеет решений (это можно записать как $x \in \varnothing$).

Объединяя полученные результаты, получаем, что решением неравенства является объединение $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{3}{2}\right) \cup [-\frac{3}{2}; 1) = (-\frac{7}{3}; 1)$.

Ответ: $x \in (-\frac{7}{3}; 1)$.

Метод интервалов удобно применять, когда нужно построить график функции, в которую входят несколько модулей. Например, пусть требуется построить график функции $y = |2x+3| + |x-1|$. Разобьём числовую ось на интервалы $(-\infty; -\frac{3}{2})$, $[-\frac{3}{2}; 1]$ и $(1; +\infty)$ и построим часть графика на каждом интервале отдельно. В данном примере все вычисления уже были проделаны, и мы получаем:

$$y = |2x+3|+|x-1| = \begin{cases} -3x-2, & \text{если } x \in (-\infty; -\frac{3}{2}); \\ x+4, & \text{если } x \in [-\frac{3}{2}; 1]; \\ 3x+2, & \text{если } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$



В результате получится график функции $y = |2x+3| + |x-1|$ (на рисунке отмечен жирной линией). Кстати, на этом графике легко разглядеть и решения неравенства $|2x+3| + |x-1| < 5$: это те точки x, в которых функция принимает значения, меньшие 5. Другими словами, *это точки, в которых график функции* $y = |2x+3| + |x-1|$ *лежит ниже графика функции* $y = 5$ (на рисунке график функции $y = 5$ отмечен горизонтальной пунктирной прямой).

Задачи для самостоятельного решения.

Решить неравенства методом интервалов **аналогично примеру 2**, изобразить процесс решения на числовой оси; нарисовать график соответствующей функции и «графически проиллюстрировать» решение неравенства:

1.6. $|x-1| + |x+2| < 3$; **1.7.** $|5x+1| + |2-3x| \geqslant \frac{13}{5}$;

1.8. $|2x+5| + |3x-7| > 4x+1$.

§1.3. Метод сведе́ния неравенства с модулями к системе или совокупности неравенств

Иногда удобно решать неравенство с модулями сведе́нием его к системе или к совокупности неравенств.

Замечание 3. Из определения модуля следуют следующие утверждения.

Пусть $a \geqslant 0$.

1. Неравенство $|x| \leqslant a$ эквивалентно **системе** неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant a; \\ x \geqslant -a; \end{cases}$$ имеется в виду, что выполнены одновременно оба неравенства.

2. Неравенство $|x| \geqslant a$ эквивалентно **совокупности** неравенств

$$\left[\begin{array}{ll} x \geqslant a; & \text{имеется в виду, что выполнено} \\ x \leqslant -a; & \text{хотя бы одно из двух неравенств.} \end{array}\right.$$

Аналогичные утверждения выполнены для строгих неравенств.

Если $a < 0$, то неравенство $|x| \leqslant a$ не имеет решений, а решения неравенства $|x| \geqslant a$ — это все действительные числа.

Это замечание позволяет решить практически любое неравенство с модулями, хотя решение часто получается достаточно громоздким. Более того, если в середине такого решения мы ошибёмся в вычислениях, ошибку будет очень трудно найти. Поэтому имеет смысл сопровождать такое решение рисунком или проверять его с помощью других методов.

Рассмотрим достаточно сложный пример, в котором модули «вложены».

Пример 3. Решить неравенство $\Big||x-3|-5\Big| \leqslant 8$.

Решение.

$$\Big||x-3|-5\Big| \leqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-3|-5 \leqslant 8 \\ |x-3|-5 \geqslant -8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-3| \leqslant 13 \\ |x-3| \geqslant -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} x-3 \leqslant 13 \\ x-3 \geqslant -3 \end{cases} \\ x - \text{любое} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3 \leqslant 13 \\ x-3 \geqslant -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 16 \\ x \geqslant -10 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-10; 16]$.

Разберём ещё один подобный пример.

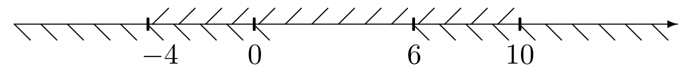
Пример 4. Решить неравенство $\Big||x-3|-5\Big| \leqslant 2$.

Решение.

$$\Big||x-3|-5\Big| \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-3|-5 \leqslant 2 \\ |x-3|-5 \geqslant -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-3| \leqslant 7 \\ |x-3| \geqslant 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x-3 \leqslant 7 \\ x-3 \geqslant -7 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-3 \geqslant 3 \\ x-3 \leqslant -3 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 10 \\ x \geqslant -4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 6 \\ x \leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -4 \leqslant x \leqslant 10 \\ x \geqslant 6 \text{ или } x \leqslant 0 \end{array}\right.$$

Итак, решение неравенства — это те и только те x, которые лежат на отрезке $[-4; 10]$ и *при этом* либо не меньше 6, либо не больше 0 (то есть лежат *вне* интервала $(0; 6)$). Нарисуем картинку:



Искомое множество — это объединение двух отрезков $[-4; 0]$ и $[6; 10]$.

Ответ: $x \in [-4; 0] \cup [6; 10]$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить неравенства методом сведе́ния к системе или совокупности неравенств, ответ изобразить на числовой оси:

1.9. $|2x + 5| < 7 - x$; **1.10.** $\Big|2x - |x - 2|\Big| < 3$;

1.11. $\Big||3x + 1| + x + 1\Big| \geqslant 2$.

Тема 2. Квадратный трёхчлен

Определение. *Квадратным трёхчленом называется выражение*

$$ax^2 + bx + c,$$

где x означает переменную, принимающую произвольное действительное значение, а коэффициенты $a \neq 0$, b и c — фиксированные действительные числа[1].

Квадратным уравнением называется уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $ax^2 + bx + c$ — квадратный трёхчлен, а x — неизвестная.

[1] Вообще говоря, переменная x и коэффициенты a, b и c могут принимать и комплексные значения, но в данном задании мы этот случай не рассматриваем.

§2.1. Выделение полного квадрата

Свойства квадратного трёхчлена и методы решения многих задач, связанных с ним, основываются на приёме «выделения полного квадрата». Этот приём состоит в следующем.

Рассмотрим квадратный трёхчлен общего вида ax^2+bx+c, где $a \neq 0$, b и c — фиксированные коэффициенты. Вначале вынесем за скобки коэффициент a (учтём, что $a \neq 0$):

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Теперь получим в скобках квадрат некоторого выражения. Для этого второе слагаемое в скобках домножим и разделим на 2, а затем добавим и вычтем внутри скобок выражение $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\underbrace{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right).$$

Теперь первые три слагаемых в скобках (отмеченные фигурной скобкой снизу) свернём в полный квадрат:

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

а четвёртое и пятое приведём к общему знаменателю:

$$-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a} = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Окончательно получаем:

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right). \qquad (1)$$

Можно теперь снова внести a в скобки, тогда получим менее громоздкое выражение

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (2)$$

Выражения (1) и (2) означают, что мы привели квадратный трёхчлен к виду aX^2+Y, где X — некоторое выражение, содержащее переменную x, а Y — это просто число. *Такое преобразование квадратного трёхчлена называется выделением полного квадрата.*

Пример. Выделить полный квадрат в трёхчлене $-4x^2+4x-7$.

Решение. Преобразуем данный трёхчлен:

$$-4x^2+4x-7=-4\left(x^2-x+\frac{7}{4}\right)=-4\left(\underbrace{x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)=$$

$$=-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)=-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{6}{4}\right)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-6.$$

Ответ: $-4x^2+4x-7=-4(x-\frac{1}{2})^2-6$.

Замечание. Иногда в примерах бывает удобно не выносить коэффициент a за скобки. Например, в вышеприведенном примере можно преобразовывать и так:

$$-4x^2+4x-7=\underbrace{-(2x)^2+2\cdot(2x)-1^2}+1^2-7=-(2x-1)^2-6=-4(x-\tfrac{1}{2})^2-6.$$

Задачи для самостоятельного решения.		
Выделить полный квадрат в трёхчленах:		
2.1. x^2+2x+3;	**2.2.** $2x^2+8x-1$;	**2.3.** $-3x^2+6x+14$.

§2.2. Формула для корней квадратного трёхчлена

Вернёмся к представлению квадратного трёхчлена в виде (1) и покажем, как с его помощью можно получить формулу для корней квадратного трёхчлена.

Как вы знаете, выражение b^2-4ac называется дискриминантом квадратного трёхчлена (дискриминант часто обозначается D). Соответствующее квадратное уравнение имеет соответственно 2, 1 или 0 *действительных* решений в зависимости от того, будет ли его дискриминант положительным, равным нулю или отрицательным. Давайте это докажем.

1) Пусть дискриминант положительный, то есть $D = b^2 - 4ac > 0$, тогда для него существует квадратный корень $\sqrt{D} > 0$, причём $D = (\sqrt{D})^2$. Тогда

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2} = \frac{(\sqrt{D})^2}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

Следовательно, выражение в скобках в правой части (1) (стр. 10) можно записать как разность квадратов:

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right).$$

Воспользовавшись формулой сокращённого умножения

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

для

$$A = x + \frac{b}{2a}, \qquad B = \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

получаем

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right) = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь вспомним, что мы ищем корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то есть те значения x, при которых трёхчлен обращается в ноль. Но, как мы только что показали в (3), этот трёхчлен равен произведению ненулевого числа a и двух скобок, содержащих неизвестную x. Значит, корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ — это те и только те значения x, при которых обращается в ноль одна из скобок из правой части (3), то есть

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = 0 \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = 0,$$

откуда сразу получаем формулу для корней квадратного уравнения:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Обычно эти равенства записывают вместе, подставляя значение дискриминанта:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4}$$

2) Пусть дискриминант равен нулю, то есть $D = b^2 - 4ac = 0$, тогда из представления (1) (стр. 10) получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

то есть квадратный трёхчлен ax^2+bx+c обращается в ноль *только* в одной точке, а именно в точке $x = -\frac{b}{2a}$. Заметим, что формула (4) сохраняет свой смысл, только теперь два корня совпадают.

3) Пусть дискриминант отрицательный, то есть $D = b^2-4ac < 0$. Тогда $-D = -(b^2-4ac) > 0$, следовательно, выражение в скобках в правой части (1) можно оценить так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} > \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0,$$

то есть

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} > 0.$$

Но это означает, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c (см. представление (1), стр. 10) ни при каких действительных значениях x не обращается в ноль, то есть квадратное уравнение не имеет действительных корней[2].

Если известны корни квадратного трёхчлена x_1 и x_2, его можно *разложить на линейные множители:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

[2]Если дискриминант квадратного трёхчлена отрицательный, то формула (4) даёт пару комплексных корней.

(Собственно, разложение на линейные множители и означает нахождение корней трёхчлена.) Это разложение позволяет решать простейшие квадратичные неравенства.

Задачи для самостоятельного решения.

Разложить квадратный трёхчлен на линейные множители и решить соответствующее неравенство:

2.4. $x^2 + 2x + 3 > 0$; **2.5.** $2x^2 + 8x - 1 \leqslant 0$;

2.6. $\dfrac{-3x^2 + 6x + 14}{x} > 0$.

§2.3. График квадратного трёхчлена

График квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ — это график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Покажем, как можно нарисовать график любого квадратного трёхчлена с помощью выделения полного квадрата.

Вначале вспомним простые правила работы с графиком любой функции.

1) Чтобы получить график функции $A \cdot f(x)$, нужно растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси y в A раз. (Если $A < 0$, то растяжение подразумевает ещё и отражение относительно оси x.)

2) Чтобы получить график функции $f(x) + B$, нужно сдвинуть график функции $f(x)$ вдоль оси y на величину B. (Если $B < 0$, то предполагается сдвиг вниз.)

3) Чтобы получить график функции $f(x - C)$, нужно сдвинуть график функции $f(x)$ вдоль оси x на величину C. (Если $C < 0$, то предполагается сдвиг влево.)

Теперь вернёмся к представлению квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ в виде (1) (стр. 10) и покажем, как с его помощью можно получить график квадратного трёхчлена из графика функции $y = x^2$.

1. Нарисуем график функции $y = x^2$.

2. Растянем его в a раз, т. е. построим график функции $y = ax^2$ (если $a < 0$, то не забудем отразить относительно оси x).

3. Сдвинем вдоль оси x на величину $-\frac{b}{2a}$, т. е. построим график функции $y = a(x + \frac{b}{2a})^2$ (не забудем учесть знак этой величины).

4. Сдвинем вдоль оси y на величину $-\frac{b^2-4ac}{2a}$ (не забудем учесть знак этой величины).

График квадратного трёхчлена ax^2+bx+c готов.

Проследим, в какую точку переходит после выполнения этих шагов вершина параболы $y=x^2$, то есть точка $(0;0)$. При растяжении она не изменяется, а после сдвигов (шаги 3 и 4) сдвигается в точку

$$\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{2a}\right).$$

Заметим ещё, что при $a>0$ ветви графика направлены вверх, как и ветви параболы $y=x^2$, а при $a<0$ — вниз, так как в этом случае при растяжении графика (шаг 2) выполняется также отражение относительно оси x.

Пример. Построить график квадратного трёхчлена $-4x^2+4x-7$.

Решение. В примере на стр. 11 мы выделили полный квадрат в этом трёхчлене:

$$-4x^2+4x-7=-4\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-6.$$

Поэтому вначале нарисуем график функции $y=-4x^2$, а потом сдвинем его на $\frac{1}{2}$ вправо и на 6 вниз. Ветви направлены вниз, а вершина параболы — в точке $(\frac{1}{2};-6)$.

Заметим, что аккуратно сдвигать параболу на рисунке достаточно сложно. Чтобы этого избежать, можно применять такую хитрость при построении графиков квадратного трёхчлена: вначале нарисовать «вре́менные» оси координат, построить график функции $y=ax^2$ (ветви направлены вверх или вниз в зависимости от знака a), а потом построить «окончательные» оси координат так, чтобы вершина уже нарисованной параболы оказалась в точке $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{2a}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Выделить полный квадрат и, **пользуясь только им**, построить графики квадратных трёхчленов и отметить на графике «характерные» особенности — вершину параболы, ось симметрии графика, точки пересечения с осями:

2.7. x^2+2x+3; **2.8.** $2x^2+8x-1$; **2.9.** $-3x^2+6x+14$.

Тема 3. Рациональные и иррациональные выражения

§3.1. Степени с целым показателем

Определение. *Пусть a — любое действительное число; n — натуральное число, большее 1. Тогда n-й степенью числа a называется произведение n множителей, каждый из которых равен a, то есть $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}$. Если $n = 1$, то по определению считают, что $a^1 = a$. Число a называется основанием степени, число n — показателем степени.*

По определению полагают, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$. Нулевая степень числа нуль не определена.

По определению полагают, что если $a \neq 0$, а число n натуральное, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Из определения сразу следуют такие свойства степеней:

1. $a^n a^k = a^{n+k}$;
2. $a^n : a^k = a^{n-k}$;
3. $(a^n)^k = a^{nk}$;
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$;
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$;
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

Например, $3^2 \cdot 3^3 = 3^{3+2} = 3^5$; $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^6$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Аналогично вводится понятие степени рациональных выражений. Чтобы возвести дробь в натуральную степень, нужно отдельно возвести в эту степень числитель, и отдельно — знаменатель:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$$

Пример. Упростить выражение $3^2 \cdot \frac{1}{27}$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$3^2 \cdot \tfrac{1}{27} = 3^2 \cdot \tfrac{1}{3^3} = 3^2 \cdot 3^{-3} = 3^{-1} = \tfrac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Упростить выражения:

3.1. $n^3 \cdot (n^2)^6$; **3.2.** $(-2a^3b)^4$; **3.3.** $\dfrac{24m^4n^3}{p^4} : \dfrac{18m^2n^6}{p^5}$.

§3.2. Корень n-й степени

Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Корнем n-й степени из числа a называют такое число, n-я степень которого равна a, то есть произвольное решение уравнения $x^n = a$. В этом задании мы будем рассматривать более узкое понятие.

Определение. *Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a, то есть неотрицательное решение уравнения $x^n = a$. Арифметический корень n-й степени обозначается $\sqrt[n]{a}$.*

Пример: $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 8$.

Определение. *Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a, то есть неотрицательное решение уравнения $x^2 = a$. Арифметический квадратный корень обозначается $\sqrt{a}$.*

Замечание. Операция нахождения квадратного корня из неотрицательного числа является обратной по отношению к операции возведения в квадрат *для неотрицательных чисел.* Обратите внимание: хотя, например, $(-5)^2 = 25$ — верное равенство, написать $\sqrt{25} = -5$ нельзя. По определению, $\sqrt{25}$ неотрицательное число, значит, $\sqrt{25} = 5$ (а не -5).

У каждого неотрицательного числа существует единственный арифметический корень n-й степени[3]. Для краткости мы дальше будем говорить просто «корень».

Если число a отрицательно, а n нечётно, то существует единственное такое отрицательное число, n-я степень которого равна a; это число $-\sqrt[n]{|a|}$. *Такое число мы будем называть корнем n-й (нечётной) степени из отрицательного числа a.*

Пример: $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

[3] У каждого комплексного ненулевого числа существует n различных корней n-й степени. В частности, если z — действительное положительное число, то один из этих корней — тоже действительное положительное число; это и есть его арифметический корень. Остальные его корни мы в этом задании не рассматриваем.

Перечислим свойства квадратного корня, которые прямо следуют из определения:

1. $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geqslant 0$;

2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Обратите внимание на условие $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$!
Например, $\sqrt{(-6)\cdot(-6)} = \sqrt{36} = 6$,
но неверно, что $\sqrt{(-6)\cdot(-6)} = \sqrt{-6}\cdot\sqrt{-6}$, так как $\sqrt{-6}$ не существует (не является действительным числом)[4];

3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geqslant 0$, $b > 0$;

4. $\sqrt{a^2} = |a|$;

5. $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$ при $a \geqslant 0$.

Аналогичные свойства выполняются для корней n-й степени.

Пример. Вынести множители из-под знака квадратного корня в выражении $\sqrt{a^2b^3}$.

Решение. Считаем, что выражение в условии задачи имеет смысл. Тогда $a^2b^3 \geqslant 0$, следовательно, $b \geqslant 0$, но a может иметь произвольный знак. Преобразуем данное выражение: $\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a|b\sqrt{b}$.

Ответ: $|a|b\sqrt{b}$.

Задачи для самостоятельного решения.

3.4. Вынести множители из-под знака квадратного корня: $\sqrt{9a^7b^5}$.

3.5. Внести множители под знак кубического корня: $\dfrac{3a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{3a}}$.

3.6. Что больше: $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ или $\sqrt[3]{6}$? Ответ обосновать.

§3.3. Иррациональные неравенства

В этом параграфе обсудим решение некоторых иррациональных неравенств.

1. Неравенство $\sqrt{f(x)} < a$.

[4] Даже если считать, что $\sqrt{-6} = i\sqrt{6}$, то указанное равенство тоже неверно!

Рассмотрим сначала случай, когда $a > 0$. Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ (область допустимых значений): $f(x) \geqslant 0$.

Во-вторых, замечаем, что при указанных выше условиях обе части неравенства неотрицательны, то есть мы можем возвести обе его части в квадрат. Таким образом, иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < a$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0; \\ f(x) < a^2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a \leq 0$. Мы знаем, что корень не может быть отрицательным, поэтому при таких значениях a решений не существует.

2. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > a$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \geqslant 0$. Тогда наше неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0; \\ f(x) > a^2. \end{cases}$$

Но так как $a \geq 0$, то первое неравенство системы следует из второго, то есть система равносильна неравенству $f(x) > a^2$.

Если же $a < 0$, то решение исходного неравенства совпадает с решением неравенства $f(x) \geqslant 0$: так как квадратный корень неотрицательный, то он всегда больше любого отрицательного числа.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{3x+19} > 3$.

Решение. Заметим, что это неравенство вида 2. Возведём обе части исходного неравенства в квадрат. Получаем:

$$3x + 19 > 3^2 \;\Leftrightarrow\; 3x + 19 > 9 \;\Leftrightarrow\; x > -\tfrac{10}{3}.$$

Заметим, что полученные значения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x > -\frac{10}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить неравенства:

3.7. $\sqrt{x} > 4$; **3.8.** $\sqrt{x-1} > -4$; **3.9.** $\sqrt{x+8} < 11$.

§3.4. Рациональные выражения

Определение. *Рациональной называется функция, которую можно представить в виде отношения двух многочленов, то есть* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— многочлены.*

Для работы с рациональными выражениями бывает удобно применять так называемый метод выделения главной части — преобразование выражения $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ к виду $R(x)+\dfrac{S(x)}{T(x)}$, где $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ — многочлены, причём степень $S(x)$ меньше, чем степень $T(x)$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Выделить главную часть выражения $\dfrac{x+1}{x-2}$.

Решение. Преобразуем числитель выражения следующим образом: $x+1 = (x+1-3)+3 = (x-2)+3$ (мы вычли и прибавили 3). Поделив почленно на знаменатель, получаем

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Таким образом, главная часть в этом выражении равна 1.

Ответ: $\frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$.

Пример. Выделить главную часть выражения $\dfrac{2x^3-3x^2+2}{x^2+1}$.

Решение. Преобразуем числитель так:

$$2x^3-3x^2+2 = \Big(2x(x^2+1)-2x\Big)-3x^2+2 = 2x(x^2+1)-3x^2-2x+2 =$$

$$= 2x(x^2+1)-\Big(3(x^2+1)-3\Big)-2x+2 = 2x(x^2+1)-3(x^2+1)-2x+5.$$

Поделив почленно на знаменатель, получаем

$$\frac{2x^3-3x^2+2}{x^2+1} = \frac{2x(x^2+1)-3(x^2+1)-2x+5}{x^2+1} = 2x-3+\frac{-2x+5}{x^2+1}.$$

Главная часть в этом выражении равна $2x-3$.

Ответ: $\frac{2x^3-3x^2+2}{x^2+1} = 2x-3-\frac{2x-5}{x^2+1}$.

Метод выделения главной части помогает строить графики рациональных функций.

Пример. Построить график функции $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Решение. Как показано выше, $\frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$. Поэтому можно действовать так.

1) Построим график функции $y = \frac{1}{x}$.

2) Сдвинув его на 2 единицы вправо, получим график функции $y = \frac{1}{x-2}$.

3) Растянув в 3 раза вдоль оси ординат, получим график функции $y = \frac{3}{x-2}$.

4) Сдвинем этот график на 1 единицу вверх и получим искомый график.

Так как график функции $y = \frac{1}{x}$ имеет две асимптоты — вертикальную $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$, то полученный график тоже имеет вертикальную и горизонтальную асимптоты $x = 2$ и $y = 1$.

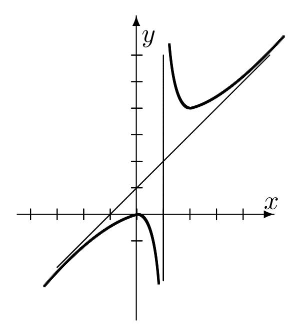
Пример. Построить график функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. Выделим главную часть:

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x(x-1)+(x-1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1},$$

то есть главная часть этого выражения равна $x+1$.

Заметим, что когда x стремится к бесконечности, график функции приближается к прямой $y = x+1$. Такая прямая называется *наклонной асимптотой*. Заметим, что «добавка» $\frac{1}{x-1}$ отрицательна при $x < 1$ и положительна при $x > 1$. Следовательно, при $x < 1$ график функции находится ниже графика наклонной асимптоты, а при $x > 1$ — выше. Кроме того, график имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. Теперь уже можно нарисовать эскиз графика.



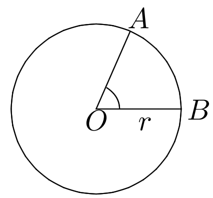
Задачи для самостоятельного решения.

Выделить главную часть выражения и построить график соответствующей функции:

3.10. $\dfrac{1-2x}{x+2}$; **3.11.** $\dfrac{x^2+1}{x-1}$; **3.12.** $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Тема 4. Тригонометрия

§4.1. Измерение углов: градусы и радианы

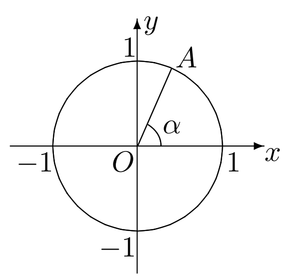


Рассмотрим окружность радиусом r с центром в точке O. Будем рассматривать центральные углы, то есть углы между двумя радиусами этой окружности, которые обозначим OA и OB. Говорят, что *величина угла AOB равна 1 радиан, если длина дуги, на которую опирается этот угол, равна радиусу окружности.* Так как длина всей окружности равна $2\pi r$, то в полном угле (который считают равным $360°$) помещается 2π радиан. Развёрнутый угол равен половине полного, то есть в нём помещается π радиан. Прямой угол, который равен половине развёрнутого, составляет $\frac{\pi}{2}$ радиан. А угол в $1°$, очевидно, равен $\frac{1}{360}2\pi = \frac{\pi}{180}$ радиан.

Из этого определения следует, что центральный угол величиной α радиан опирается на дугу длиной $r\alpha$. Самое простое соотношение получается для окружности радиусом 1: *центральный угол величиной α радиан опирается на дугу длиной α.*

Отметим, что название «радианы» используется, только если одновременно используется измерение углов и в градусах, и в радианах. Если же мы измеряем углы только в радианах, слово «радиан» вообще опускается. Например, «угол π» означает развёрнутый угол, а «угол $\frac{\pi}{2}$» означает прямой угол.

§4.2. Тригонометрическая окружность



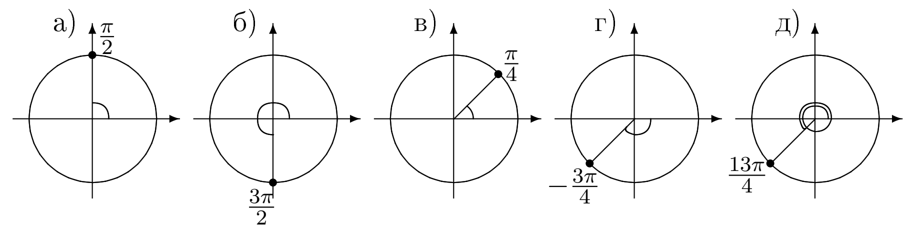
Рассмотрим окружность, поместим её на координатную плоскость и выберем систему координат так, чтобы её центр находился в центре окружности, а единица длины совпадала с радиусом (тогда радиус окружности будет равен 1). Нарисуем оси координат x и y и будем рассматривать центральные углы, образованные положительным лучом оси x и каким-нибудь радиусом окружности. При этом *положительные углы отсчитываются против часовой стрелки* (а отрицательные — по часовой стрелке)[5].

[5]Если плоскость xOy сопоставить комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то тригонометрическая окружность превратится в единичную окружность $\{z : |z| = 1\}$.

Откладывая угол, удобно рисовать соответствующий радиус и точку на окружности (на нашем рисунке это точка A), которая отвечает этому углу. Можно представлять себе, что при $\alpha > 0$ точка A «едет» по окружности, начиная от точки $(1;0)$, в положительном направлении (то есть против часовой стрелки), пока не проедет заданный угол α (конечно, выраженный в радианах). Поскольку радиус тригонометрической окружности равен 1, то *длина дуги, которую проедет точка A, равна α.* Итак, точка A на тригонометрической окружности «отсчитывает» угол α. Величину угла для удобства можно писать рядом с точкой, которая отсчитывает угол.

Пример. Изобразить на тригонометрической окружности углы: а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; в) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; д) $\alpha = \frac{13\pi}{4}$.

Решение показано на рисунке. В примере г) не забудем, что отрицательные углы откладываются против часовой стрелки. В примере д) заметим, что $\frac{13\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4} = 2\pi + (\pi + \frac{\pi}{4})$. Но угол 2π соответствует полной окружности, то есть точка, отсчитывающая угол $\frac{13\pi}{4}$, проедет полную окружность (и вернётся в начальную точку), а потом проедет ещё угол $\pi + \frac{\pi}{4}$.



Пример. Изобразить на тригонометрической окружности углы: а) $\alpha = 1$; б) $\alpha = 6$; в) $\alpha = -2$; г) $\alpha = 7$.

Решение. В этой задаче имеются в виду углы, измеренные в радианах! Из предыдущего примера понятно, как изображать на тригонометрической окружности углы, кратные дробным частям π. Но целые числа не кратны частям числа π, поэтому невозможно *точно* указать, где расположены соответствующие точки. Чтобы выяснить, где *приблизительно* расположена точка, отвечающая углу α, нужно найти, между какими числами, выраженными в частях числа π, расположено число α. Такие приблизительные оценки бывают очень полезными, когда нужно оценить, например, знак синуса или косинуса некоторого угла или выяснить, что больше — синус угла или его косинус. Мы будем пользоваться оценкой $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

а) Так как $\frac{\pi}{2} > \frac{3{,}14}{2} > 1$ и $\frac{\pi}{4} < \frac{3{,}15}{4} < 1$, то есть $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$, то точка, отвечающая углу $\alpha = 1$, расположена в первой четверти, между углами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$.

б) Так как $2\pi > 2 \cdot 3{,}14 > 6$ и $2\pi - \frac{\pi}{4} < (2 - \frac{1}{4}) \cdot 3{,}15 = \frac{7}{4} \cdot 3{,}15 < 6$, то есть

$$\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} < 6 < 2\pi,$$

то точка, отвечающая углу $\alpha = 6$, расположена в четвёртой четверти, между углами $\frac{7\pi}{4}$ и 2π.

в) Удобно сначала рассмотреть угол $-\alpha = 2$, для которого $\frac{\pi}{2} < \frac{3{,}15}{2} < 2$ и $\frac{3\pi}{4} > \frac{3 \cdot 3{,}14}{4} > 2$, откуда получаем

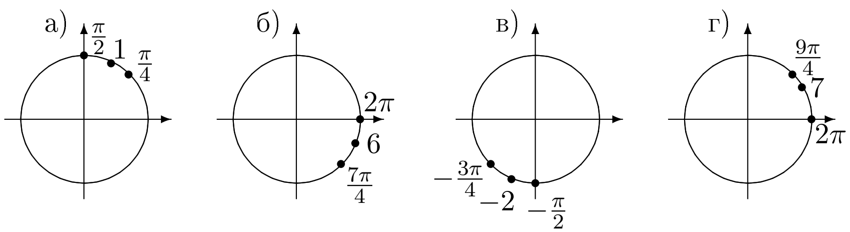
$$-\frac{3\pi}{4} < -2 < -\frac{\pi}{2}.$$

Не забудем, что отрицательные углы откладываются против часовой стрелки.

г) Так как $2\pi < 2 \cdot 3{,}15 < 7$ и $2\pi + \frac{\pi}{4} > (2 + \frac{1}{4}) \cdot 3{,}14 = \frac{9}{4} \cdot 3.14 > 7$, то есть

$$2\pi < 7 < 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4},$$

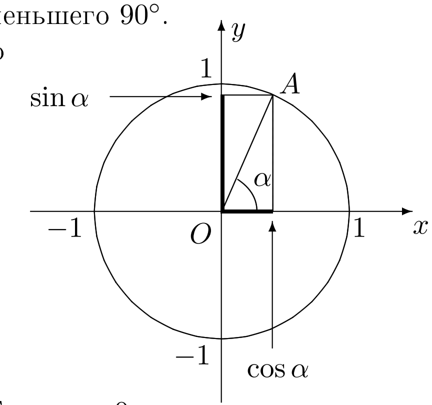
то точка, отсчитывающая угол $\alpha = 7$, прошла полный круг и оказалась в первой четверти.



Заметим, что расположение соответствующей точки можно уточнять дальше. Например, так как $\frac{25}{8} = 3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$, то для $\alpha = 1$ имеем: $\frac{6}{19}\pi < 1 < \frac{8}{25}\pi$. Но если нам нужно только приблизительно изобразить соответствующую точку на рисунке, то эта информация не очень полезна.

§4.3. Синус и косинус

Напомним, что понятия синуса и косинуса угла вводятся в геометрии следующим образом. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, пусть угол C прямой. Тогда синусом угла CAB называется число $\frac{CB}{AB}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе), а косинусом угла CAB называется число $\frac{AC}{AB}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе). Так можно ввести синус и косинус для любого острого угла, то есть угла, меньшего $90°$.

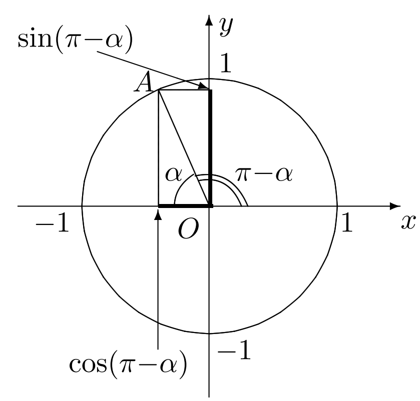


Рассмотрим тригонометрическую окружность и её радиус, образующий острый угол α с положительным лучом оси x; пусть точка A — конец этого радиуса. Тогда, как несложно проверить, синус (острого) угла равен ординате, а косинус — абсциссе точки A. Именно это принимают как определение синуса и косинуса *произвольного* угла.

Пусть α — произвольное число. Если $\alpha > 0$, то отсчитаем угол α (радиан) от положительного луча оси x в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. Если $\alpha < 0$, то отсчитывать угол будем в отрицательном направлении. Тогда по определению **синус равен ординате, а косинус — абсциссе точки A.** Отложить на окружности можно угол произвольной величины. Если угол больше 2π или меньше -2π, то точка, отсчитывающая угол, сделает один или несколько полных оборотов, то есть пройдёт несколько раз одно и то же положение на окружности. Это означает, что синусы и косинусы разных углов могут совпадать. Точнее,

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,$$

где k — произвольное целое число. Другими словами значения синуса и косинуса *периодически повторяются*, причём наименьший период такого повторения равен 2π.



С помощью тригонометрической окружности легко продемонстрировать, что если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то

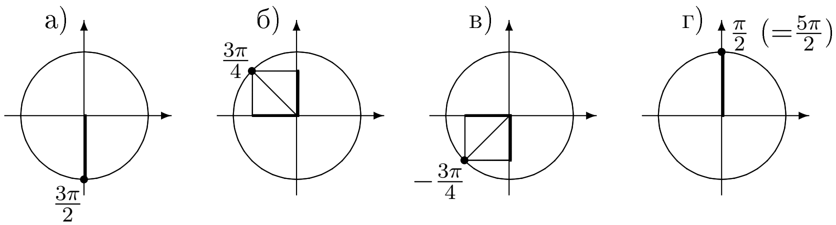
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

(для этого достаточно сравнить два последних рисунка), причём эти равенства верны для произвольных углов α.

Вообще на тригонометрической окружности легко увидеть многие из тригонометрических тождеств. Например, основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ очевидно для произвольных углов (на рисунке хорошо видно, что это просто теорема Пифагора). Так же легко проверяются все так называемые *формулы приведения:* $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ и так далее.

Пример. Найти: а) $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{3\pi}{4}$; в) $\sin(-\frac{3\pi}{4})$, $\cos(-\frac{3\pi}{4})$; г) $\sin\frac{5\pi}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{2}$. Проиллюстрировать ответ на тригонометрической окружности.

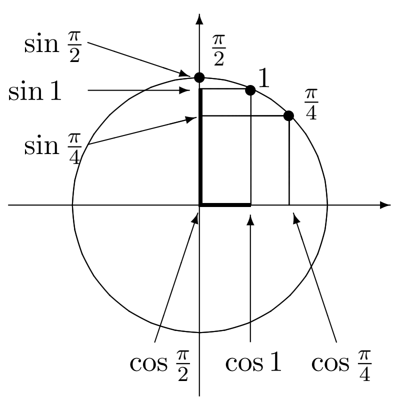
Ответ: а) $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; б) $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin\frac{5\pi}{2} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{5\pi}{2} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.



Пользуясь этими результатами, мы можем оценить синусы и косинусы углов, которые не являются частями π.

Пример. Оценить $\sin 1$ и $\cos 1$.

Решение. Как было показано выше, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$. Поскольку синус — это ордината точки, отсчитывающей угол, а косинус — её абсцисса, то получаем очевидные оценки:



$$\sin\frac{\pi}{4} < \sin 1 < \sin\frac{\pi}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{2} < \cos 1 < \cos\frac{\pi}{4}.$$

Вспоминая числовые значения синусов и косинусов $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$, получаем

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < 1, \qquad 0 < \cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Эти оценки достаточно грубые (например, неравенство $\sin 1 < 1$ почти не несёт информации!) Но их можно уточнить, если уточнить оценку для α. Для этого нужно уметь находить синусы и косинусы углов, с помощью которых оценивается α. Например, вернёмся к пункту а) задачи. Очевидно, $1 < \frac{3\pi}{8}$, следовательно, $\sin 1 < \sin\frac{3\pi}{8}$. Но $\sin\frac{3\pi}{8}$ можно найти по формуле для синуса половинного угла (поскольку $\cos\frac{3\pi}{4}$ мы знаем). Так как угол $\frac{3\pi}{8}$ находится в первой четверти, его синус положительный, следовательно,

$$\sin 1 < \sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Аналогично, так как $\cos 1 > \cos\frac{3\pi}{8}$, то получаем

$$\cos 1 > \cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

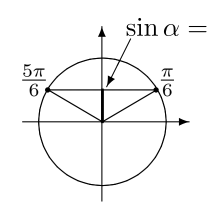
Итак, получаем оценки:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} < \cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Понятно, что их можно и дальше уточнять.

§4.4. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Пример. Решить тригонометрическое уравнение: а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Нарисовать тригонометрическую окружность и проиллюстрировать полученный ответ.



Решение. а) Так как синус положительный, то соответствующий угол α может находиться только в первой и второй четверти. В первой четверти — это угол $\frac{\pi}{6}$ (и только он, потому что в первой четверти синус возрастает). Во второй четверти — это угол $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (и только он, потому что во второй четверти синус убывает), что хорошо видно на тригонометрической окружности. Наконец, не забудем добавить углы, кратные 2π. Получаем две серии решений:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

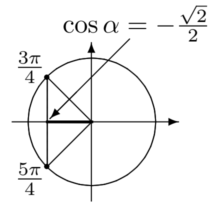
Это означает, что уравнению удовлетворяют числа, принадлежащие объединению двух (бесконечных) серий значений.

Полученные две серии можно (но не обязательно) записать как одну: $\alpha = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, для любого чётного $n = 2k$ получаем

$$(-1)^{2k} \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

а для любого нечётного $n = 2m + 1$ получаем

$$(-1)^{2m+1} \frac{\pi}{6} + \pi(2m+1) = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi m = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m.$$

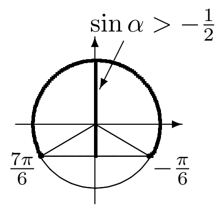


б) Как известно, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как косинус отрицательный, то соответствующий угол принадлежит второй или третьей четверти: очевидно, это углы $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ и $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Прибавляя углы, кратные 2π, получаем две серии решений:

$$\alpha = \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha = \tfrac{5\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: а) $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример. Решить тригонометрическое неравенство: а) $\sin\alpha > -\frac{1}{2}$; б) $|\cos\alpha| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Нарисовать тригонометрическую окружность и проиллюстрировать полученный ответ.

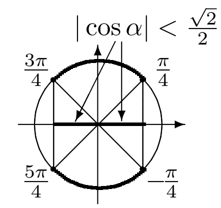


Решение. а) Отметим на тригонометрической окружности дугу, точки которой отвечают углам, удовлетворяющим неравенству $\sin\alpha > -\frac{1}{2}$. Ответ можно «считать» прямо с этого рисунка. Для более строгого рассуждения заметим, что все углы в первой и второй четверти (то есть углы от 0 до π) удовлетворяют неравенству, так как для них синус положительный. Синус в третьей четверти убывает (от 0 до -1), а в четвёртой четверти возрастает (от -1 до 0), поэтому из третьей и четвёртой четвертей подойдут углы от π до $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ и от $-\frac{\pi}{6}$ до 0 соответственно. Таким образом, получаем, что $\alpha \in (-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6})$. Наконец, добавляем углы, кратные 2π, и получаем, что неравенству удовлетворяют числа, принадлежащие объединению (бесконечной) серии интервалов

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \alpha < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Сначала раскроем модуль:

$$|\cos\alpha| < \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Leftrightarrow\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Теперь отметим на тригонометрической окружности ду́ги, точки которых отвечают углам, удовлетворяющим этому двойному неравенству (для которых удовлетворяются одновременно два неравенства $\cos\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$). Так как косинус в каждой четверти сохраняет знак, то для каждой четверти достаточно рассмотреть только одно неравенство. Например, для первой четверти получаем $0 \le \cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть $\frac{\pi}{4} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Аналогично получаем решения для остальных четвертей, откуда $\alpha \in (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4})$. Осталось добавить углы, кратные 2π. Получаем две серии интервалов:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < \alpha < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{5\pi}{4} + 2\pi m < \alpha < \frac{7\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Их можно записать и как одну серию: $\frac{\pi}{4} + \pi n < \alpha < \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Обе формы ответа правильны.

Ответ: а) $\alpha \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\alpha \in (\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить тригонометрическое уравнение:

4.1. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; **4.2.** $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

Нарисовать тригонометрическую окружность и проиллюстрировать ответ. *Не забудьте добавить* $2\pi k$.

Решить тригонометрическое неравенство:

4.3. $\sin\alpha > -\frac{1}{2}$; **4.4.** $|\cos\alpha| < \frac{1}{3}$.

Нарисовать тригонометрическую окружность и проиллюстрировать ответ. *Учтите, что если ответ — это интервал* $(a; b)$, *то считают, что* $a < b$. *Также не забудьте добавить* $2\pi k$.

§4.5. Арксинус и арккосинус

Пусть нужно решить уравнение $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Тут не удаётся подобрать точные значения угла α, синус которого равен $\frac{1}{3}$. Но очевидно, что решения этого уравнения существуют, а именно, получаем две серии решений (они расположены на тригонометрической окружности аналогично решениям уравнения $\sin\alpha = \frac{1}{2}$). Эти решения записывают с помощью функции арксинус. А именно, для любого числа $x \in [-1; 1]$ его *арксинусом* (обозначается $\arcsin x$) называют величину угла $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен x. Слово «arc» на латыни означает «дуга». То есть можно сказать так: $\arcsin x$ — это дуга, синус которой равен x. Отрезок для угла $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ в определении арксинуса выбран так, чтобы каждому значению $x \in [-1; 1]$ отвечало единственное значение угла α.

Таким образом, по определению $\sin(\arcsin x) = x$. А верно ли равенство $\arcsin(\sin x) = x$? Вообще говоря, нет. Это равенство верно только при $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Другими словами, функция $\sin x$, заданная только на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, и функция $\arcsin x$ *взаимно обратные*.

Итак, уравнение $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ имеет такие решения:

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично определяется арккосинус: для произвольного числа $x \in [-1; 1]$ его *арккосинусом* (обозначается $\arccos x$) называют величину угла $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен x. Отрезок для угла $[0; \pi]$ выбран так, чтобы каждому значению $x \in [-1; 1]$ отвечало единственное значение угла α. То есть уравнение $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ имеет такие решения:

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha = -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Пример. Решить: а) уравнение $\arccos x = \frac{\pi}{3}$; б) неравенство $\arccos x < \frac{\pi}{3}$.

Решение. а) По определению, $\cos(\arccos x) = x$. Поэтому $x = \cos(\arccos x) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то есть $x = \frac{1}{2}$.

б) Вспомним, что косинус на отрезке $[0; \pi]$ убывает. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$\cos(\arccos x) > \cos\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{2}.$$

Вспомним ещё, что арккосинус определён только для $x \in [-1;1]$, поэтому окончательный ответ: $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

Ответ: а) $x = \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить:

4.5. уравнение $\arcsin x = -\frac{\pi}{4}$; **4.6.** неравенство $\arcsin x < -\frac{\pi}{4}$.

Нарисовать тригонометрическую окружность и проиллюстрировать ответ.

4.7. Решить уравнение $\sin^2 3x - 3\sin 3x \cos 3x + 5\cos^2 3x = 1$. Выписать все решения и найти те из них, которые принадлежат промежутку $[0; \frac{\pi}{4}]$. Нарисовать тригонометрическую окружность и проиллюстрировать ответ. *Учтите, что если ответ — это интервал $(a; b)$, то считают, что $a < b$. Не забудьте добавить $2\pi k$.*

Тема 5. Тригонометрические уравнения и тождества

В разных задачах возникает необходимость решить тригонометрическое уравнение или преобразовать тригонометрическое выражение. В этой теме мы рассмотрим примеры таких задач.

§5.1. Замена переменных

В этом параграфе будем пользоваться только основной тригонометрической формулой

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Пример. Решить уравнение $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Решение. Такое уравнение легко привести к квадратному заменой переменных. Очевидно, что если x — решение этого уравнения, то $\cos x \neq 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то из основной тригонометрической формулы следует, что $\sin x = \pm 1$, то есть $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2 \neq 0$.

Значит, обе части исходного уравнения можно разделить на $\cos^2 x$, откуда получаем

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Обозначая $z = \operatorname{tg} x$, получим квадратное уравнение $2z^2 - z - 1 = 0$. Его корни равны 1 и $-\frac{1}{2}$, то есть $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$. Решая эти уравнения, получаем две серии решений: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (мы учли, что функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет период π).

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Иногда бывает важно выделить корни уравнения, которые принадлежат заранее заданному отрезку. Найдём, например, корни уравнения $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$, которые лежат на отрезке $[\pi; 2\pi]$. Из первой серии решений ($x = \frac{\pi}{4} + \pi n$) на этом отрезке лежит только число $\frac{\pi}{4} + \pi$. Для того, чтобы понять, какие корни из второй серии лежат на нужном отрезке, заметим, что $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{2})$ — это число, тангенс которого равен $-\frac{1}{2}$, то есть $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$. Следовательно, из второй серии решений на заданном отрезке лежит только число $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) + 2\pi$.

Пример. Решить уравнение $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 1$.

Решение. Это уравнение тоже можно свести к квадратному уравнению. Вначале приведём его к такому виду, который рассматривался в предыдущем примере. Для этого воспользуемся основной тригонометрической формулой и заменим 1 в правой части на $\sin^2 x + \cos^2 x$. Получаем:

$$\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin^2 x - 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -3\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0.$$

Заметим, что в этом примере $\cos x$ может быть равен 0; в этом случае получаем серию решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x \neq 0$, то разделим обе части на $\cos^2 x$ и получим уравнение $-3\operatorname{tg} x + 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$, откуда получаем ещё серию решений $x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример. Решить уравнение $\sin^2 3x - 3\sin 3x \cos 3x + 5\cos^2 3x = 1$.

Решение. Конечно, это уравнение решается так же, как предыдущее, только в правой части вместо 1 напишем $\sin^2 3x + \cos^2 3x$.

Две серии решений получаются из равенств $\cos 3x = 0$ и $\operatorname{tg} 3x = \frac{4}{3}$, поэтому $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $3x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Разделив на 3, получаем ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

§5.2. Применение формул для синуса и косинуса суммы, разности, двойных углов и др.

Пример. Решить уравнение $(\cos x - 1)\operatorname{ctg} x = \sin 2x$.

Решение. Преобразуем обе части равенства, подставив определение котангенса ($\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$) и формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$$(\cos x - 1)\operatorname{ctg} x = \sin 2x \;\Leftrightarrow\; (\cos x - 1)\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x\cos x.$$

Отметим, что $\sin x$ не может быть равен 0 (учтём ОДЗ котангенса), и умножим обе части равенства на $\sin x$. Получим уравнение

$$(\cos x - 1)\cos x = 2\sin^2 x\cos x. \tag{1}$$

Заметим, что корни уравнения $\cos x = 0$ являются также корнями уравнения (1). Отсюда получаем серию решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (1) на $\cos x$, получим

$$\cos x - 1 = 2\sin^2 x. \tag{2}$$

А уравнение (2) легко свести к квадратному, применив основную тригонометрическую формулу; для этого заменим $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ в правой части:

$$\cos x - 1 = 2\sin^2 x \;\Leftrightarrow\; \cos x - 1 = 2(1-\cos^2 x) \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0.$$

Обозначая $z = \cos x$, получаем квадратное уравнение $2z^2+z-3 = 0$, корни которого равны 1 и $-\frac{3}{2}$. Теперь вспомним, что $z = \cos x$, а величина косинуса всегда по модулю не больше 1. Это означает, что $z = -\frac{3}{2}$ *не отвечает никакому решению исходного уравнения.* Для $z = \cos x = 1$ получаем серию $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Однако, возвращаясь к исходной задаче, вспомним, что *эти значения не входят в ОДЗ котангенса.*

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Решить уравнение: $\sin(\frac{\pi}{3} - x) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = \sqrt{3}$.

Решение. Упростим левую часть выражения, применив формулы для синуса и косинуса разности, и подставим известные выражения для синуса и косинуса $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$:

$$\sin(\tfrac{\pi}{3}-x)+\cos(\tfrac{\pi}{6}-x) = \sin\tfrac{\pi}{3}\cos x-\cos\tfrac{\pi}{3}\sin x+\cos\tfrac{\pi}{6}\cos x+\sin\tfrac{\pi}{6}\sin x =$$

$$= (\sin\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{6})\cos x + (-\cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\tfrac{\pi}{6})\sin x = \sqrt{3}\cos x.$$

То есть исходное уравнение сводится к уравнению $\sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = 1$.

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Решить уравнение: $\sin 3x + \sin 5x = 0$.

Решение. Первый способ: перепишем уравнение в виде $\sin 3x = -\sin 5x$. Нарисуем на тригонометрической окружности точки α и β, для которых $\sin\alpha = -\sin\beta$. Это приводит к двум случаям: $\alpha = -\beta + 2\pi k$ и $\alpha = \beta + \pi + 2\pi n$, откуда получаем две серии решений исходного уравнения, отвечающих этим случаям: $3x = -5x + 2\pi k \Leftrightarrow 8x = 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{4}$ и $3x = 5x + \pi + 2\pi n \Leftrightarrow 2x = \pi + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второй способ: воспользуемся формулой для суммы синусов $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Подставляя $\alpha = 3x$, $\beta = 5x$, получаем:

$$\sin 3x+\sin 5x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin 4x\cos x = 0$$

(мы воспользовались чётностью косинуса, $\cos(-x) = \cos x$). Отсюда получаем две серии решений, отвечающих $\sin 4x = 0$ и $\cos x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения.

5.1. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$. Найти все корни, отметить их на тригонометрической окружности. Выделить те корни, которые лежат на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

5.2. Решить уравнение $\sin^2 x - \sin x\cos x = 1$. Найти все корни, отметить их на тригонометрической окружности. Выделить те корни, которые лежат на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

§5.3. Тригонометрические тождества

Пример. Доказать тождество $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$.

Решение. Вспомним определение тангенса и используем формулу синуса суммы:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}.$$

Осталось привести левую часть к общему знаменателю — и получим правую часть.

Пример. Доказать тождество: $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}$.

Решение. Обозначим $x = \operatorname{arctg} 2$, $y = \operatorname{arctg} 3$, тогда по определению арктангенса $\operatorname{tg} x = 2$, $\operatorname{tg} y = 3$. Вычислим тангенс от обеих частей исходного равенства, пользуясь формулой для тангенса суммы $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{2+3}{1 - 2 \cdot 3} = -1,$$

откуда $x + y = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но x и y — это конкретные числа, поэтому им соответствует одно определённое значение k. Найдём это k. По определению арктангенса, x и y — это числа, принадлежащие интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенсы которых равны 2 и 3 соответственно. Поэтому $x, y \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$, откуда $x+y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Следовательно, из всей серии значений $x + y = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ подходит только $\frac{3\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть известно, что $\sin x + \cos x = a$. Найти $\sin 2x$ (то есть выразить $\sin 2x$ через a).

Решение. Возведём обе части данного равенства в квадрат, получим

$$(\sin x + \cos x)^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = a^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1 + 2 \sin x \cos x = a^2 \;\Leftrightarrow\; \sin 2x = a^2 - 1.$$

Задачи для самостоятельного решения.

5.3. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

5.4. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

Вычислить: **5.5.** $\cos \frac{\pi}{12}$; **5.6.** $\sin(\arccos \frac{4}{5})$.

Тема 6. Логарифмы

Определение. *Пусть a и b — вещественные числа, причём $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.*

Логарифм числа b по основанию a обозначается так: $\log_a b$.

Это определение означает, что

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство называется *основным логарифмическим тождеством.* Другими словами, равенство $x = \log_a b$ означает, что $a^x = b$. Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$.

Особенно часто используются логарифмы по таким основаниям:

1. Логарифмы по основанию 10 называются десятичными и обозначаются lg. Например, $\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$.

2. Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются ln (напомним, что число e определяется как $e = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$; $e \approx 2{,}7$). То есть $\log_e x = \ln x$.

Основные свойства логарифмов

1) Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\log_a a = 1$.

Доказательство. Обозначим $x = \log_a a$, тогда по определению $a^x = a$. Но $a \neq 1$ (это следует из ОДЗ), поэтому единственное возможное значение x — это 1.

2) Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\log_a 1 = 0$.

Доказательство. Обозначим $x = \log_a 1$, тогда по определению $a^x = 1$. Но $a \neq 1$ (это следует из ОДЗ), поэтому единственное возможное значение x — это 0.

3) Пусть $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

Доказательство. Обозначим $x = \log_a b$ и $y = \log_a c$, тогда по определению $a^x = b$ и $a^y = c$. Следовательно, $a^x \cdot a^y = b \cdot c$. Но $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, поэтому $a^{x+y} = b \cdot c$. То есть, чтобы получить число $b \cdot c$, нужно возвести число a в степень $x+y$. По определению логарифма, это означает, что $x+y = \log_a(b\cdot c)$. Учитывая обозначения для x и y, получаем $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$, что и требовалось доказать.

Свойства 4)—6) доказываются аналогично свойству 3).

4) Пусть $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

5) Пусть $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.

6) Пусть $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $m \neq 0$. Тогда $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$.

7) Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, тогда $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. В частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (при $b \neq 1$). Эта формула позволяет работать только с логарифмами по какому-нибудь одному основанию (чаще всего бывает удобно пользоваться натуральными логарифмами).

Доказательство. Обозначим $x = \log_c b$ и $y = \log_c a$, тогда по определению $c^x = b$ и $c^y = a$. Следовательно, $c = a^{1/y}$, откуда получаем $c^x = a^{x/y}$. Итак, $c^x = a^{x/y}$ и $c^x = b$, то есть $a^{x/y} = b$. Но по определению логарифма это означает, что $\log_a b = \frac{x}{y} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, что и требовалось доказать.

При решении задач с показательными и логарифмическими функциями обычно имеет смысл сделать одинаковыми основания всех степеней и основания всех логарифмов.

Пример. Вычислить $\log_2 5 \cdot \log_5 8$.

Решение: $\log_2 5 \cdot \log_5 8 = \dfrac{1}{\log_5 2} \cdot \log_5 8 = \dfrac{\log_5 2^3}{\log_5 2} = \dfrac{3 \log_5 2}{\log_5 2} = 3$.

Пример. Вычислить $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$ (имеется в виду $\log_3(\log_4 \sqrt[9]{4})$).

Решение: $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4} = \log_3(\log_4(4^{\frac{1}{9}})) = \log_3 \left(\frac{1}{9} \log_4 4\right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 (3^{-2}) = -2$.

Пример. Обозначим $a = \lg 2$, $b = \lg 3$. Выразить через a и b выражение $\lg 72$.

Решение: $\lg 72 = \lg (9 \cdot 8) = \lg 9 + \lg 8 = \lg 3^2 + \lg 2^3 = 2 \cdot \lg 3 + 3 \cdot \lg 2 = 2b + 3a$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить значение выражения:

6.1. $9^{\log_3 \sqrt{5}}$; **6.2.** $\log_4 \log_2 \sqrt{16}$; **6.3.** $\log_2 11 + \log_{11} 2$.

Решить уравнение:

6.4. $\log_{0,1} x = -2$; **6.5.** $\log_x 7 = \frac{1}{2}$; **6.6.** $\ln |x - 1| = -1$.

Решить неравенство:

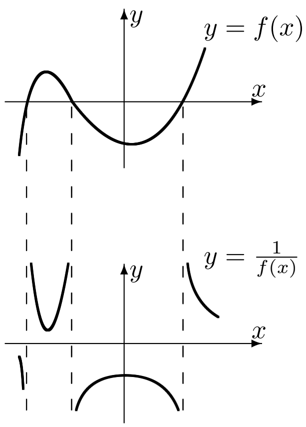
6.7. $|\log_2 x - 1| < \frac{1}{2}$; **6.8.** $2 \log_2^2 x + 4 \log_2 x < 3$.

Тема 7. Графики

На странице 14 мы напомнили некоторые правила построения графиков. В этом параграфе мы укажем ещё некоторые свойства графиков функций. Так как наши построения будут достаточно неточными, будем говорить о построении эскизов графиков.

Пример. Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$. Построить эскиз графика функции $y = \frac{1}{f(x)}$.

Решение. Заметим прежде всего, что корни знаменателя не входят в ОДЗ новой функции. Более того, если x стремится к корню знаменателя, модуль величины $\frac{1}{f(x)}$ стремится к бесконечности. Это означает, что график функции $y = \frac{1}{f(x)}$ имеет вертикальные асимптоты в корнях знаменателя. При этом знак величины $\frac{1}{f(x)}$ совпадает со знаком $f(x)$. Более того, функция $y = \frac{1}{f(x)}$ не имеет корней, а менять знак может только при переходе через корень знаменателя. Эти замечания позволяют построить эскиз графика функции $y = \frac{1}{f(x)}$.



Пусть функция f взаимно однозначно отображает некоторое множество X в множество Y. Напомним, что *обратной функцией* к функции f называется функция g, которая отображает каждое значение $f(x) \in Y$ в x, то есть $g(f(x)) = x$ для всех $x \in X$. Заметим, что при этом $f(g(y)) = y$ для всех $y \in Y$. Обратная функция обозначается так: $g = f^{-1}$.

Если функция f на своей области определения не является взаимно однозначной, обратная функция не существует. В таком случае можно попытаться задать исходную функцию на меньшей области.

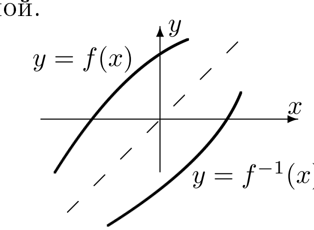
Например, функция $\ln x$ является обратной к функции e^x (заданной на всей действительной оси). А функция $\arcsin x$ является обратной к функции $\sin x$, если $\sin x$ рассматривается *только* на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (если рассмотреть функцию $\sin x$ на большем интервале, она перестанет быть взаимно однозначной).

Вот ещё один пример: функция $g(x) = x - 1$ является обратной к функции $f(x) = x + 1$ (заданной на всей действительной оси), потому что $g(f(x)) = f(x) - 1 = (x + 1) - 1 = x$.

Чтобы найти обратную к функции $f(x)$, нужно из равенства $y = f(x)$ выразить x через y. Полученная зависимость и будет обратной функцией. Например, для функции $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ из равенства $y = \sqrt[3]{x+1}$ выразим x через y и получим $x = y^3 - 1$. Обозначая аргумент функции через x, получаем, что обратная функция имеет вид $g(x) = x^3 - 1$.

Пример. Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$. Построить эскиз графика обратной функции.

Решение. Вначале нужно убедиться в том, что исходная функция взаимно однозначно отображает свою область определения на область значений (иначе обратной функции не существует). Если исходная функция непрерывна, то она взаимно однозначна тогда и только тогда, когда она является монотонной.



Поскольку обратная функция переводит $y = f(x)$ в x, то для получения графика обратной функции нужно «поменять местами» оси x и y у графика исходной функции. При этом график отразится относительно прямой $y = x$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить график функции:

7.1. $y = \log_3(5x)$; **7.2.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$; **7.3.** $y = \sin^2 x$;

7.4. $y = \sin x + \cos x$; **7.5.** $y = \ln|x+2|$; **7.6.** $y = |\arcsin x|$;

7.7. $y = \log_x 2$; **7.8.** $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$; **7.9.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Указать, на какой области данная функция имеет обратную, найти эту обратную и построить графики исходной и обратной функции:

7.10. $y = \sin(2x)$; **7.11.** $y = \operatorname{tg}(x-1)$; **7.12.** $y = \dfrac{1}{x-1} - 1$.

Построить график функции:

7.13. $y = [-x]$; **7.14.** $y = x \cdot [x]$; **7.15.** $y = \{x^2\}$,

где $[x]$ — это целая часть числа x, а $\{x\}$ — его дробная часть.

Приложение 1. Тригонометрические формулы

1. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2. Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}.$$

3. Формулы половинного аргумента (понижения степени):

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

4. Формулы универсальной подстановки:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

5. Формулы сложения/вычитания аргументов:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \qquad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}; \qquad \operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}.$$

6. Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin x\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2};$$

$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2};$$

$$\sin x\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}.$$

7. Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

8. Формула дополнительного аргумента:

$$a\sin x+b\cos x=c\sin(x+\varphi),$$

где $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad\sin\varphi=\frac{b}{c}$, $\quad\cos\varphi=\frac{a}{c}$.

9. Формулы приведения:

$$\sin(-x)=-\sin x,\qquad \cos(-x)=\cos x;$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)=\cos x,\qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}-x)=\sin x;$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}+x)=\cos x,\qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}+x)=-\sin x;$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\qquad \cos(\pi-x)=-\cos x;$$

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\qquad \cos(\pi+x)=-\cos x.$$

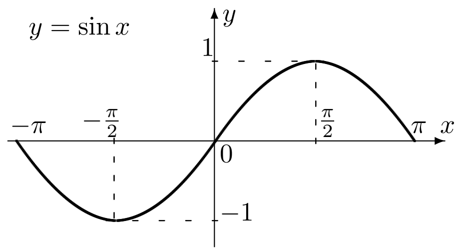
10. Значения тригонометрических функций для некоторых значений аргументов:

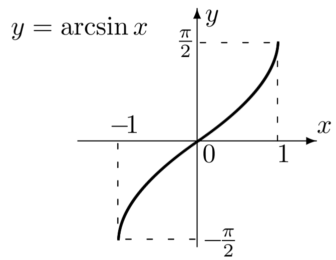
$$\sin 0=0,\quad \cos 0=1;\qquad \sin\tfrac{\pi}{2}=1,\quad \cos\tfrac{\pi}{2}=0;$$

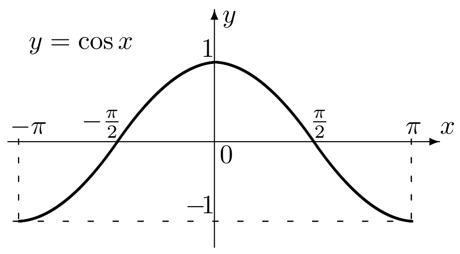
$$\sin\tfrac{\pi}{4}=\cos\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\sqrt{2}}{2};$$

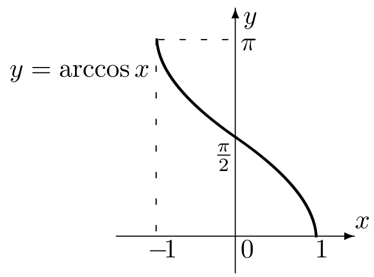
$$\sin\tfrac{\pi}{6}=\cos\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2};\qquad \sin\tfrac{\pi}{3}=\cos\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

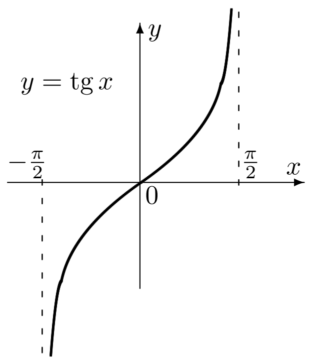
Приложение 2. Графики некоторых функций

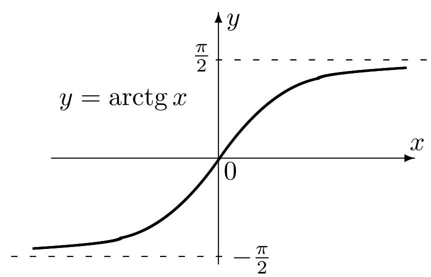


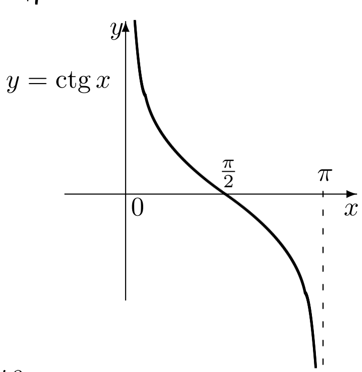


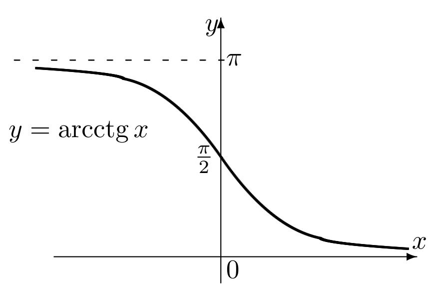


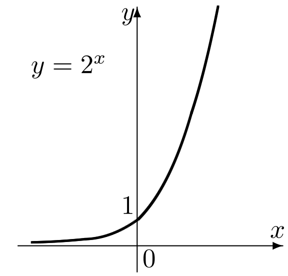


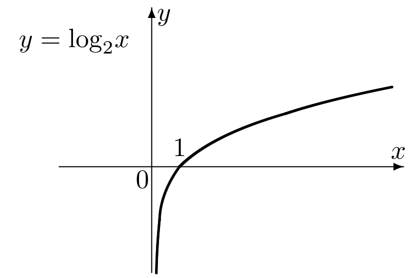


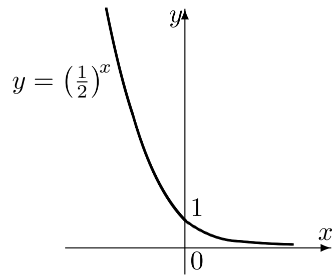


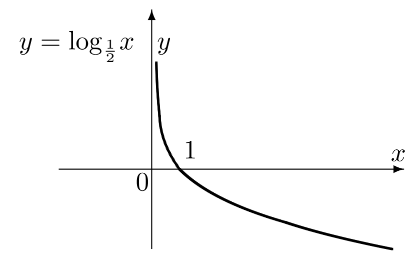


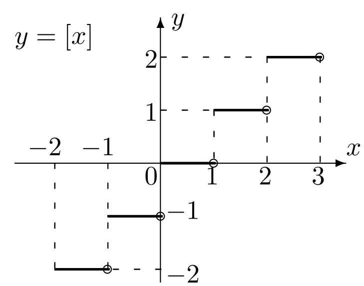


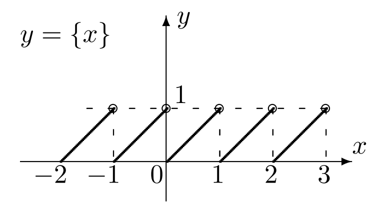

$y = 2^x$
y
x
1
0


$y = \log_2 x$
y
x
1
0


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
y
x
1
0


$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
y
x
1
0


$y = [x]$
y
x
2
1
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2


$y = \{x\}$
y
x
1
−2
−1
0
1
2
3

Приложение 3. Некоторые преобразования графиков

График f(x)

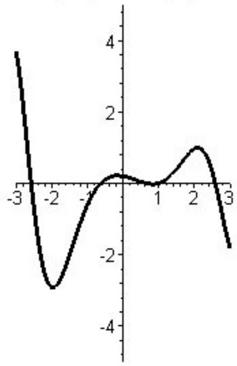


График f(x)+a, a>0

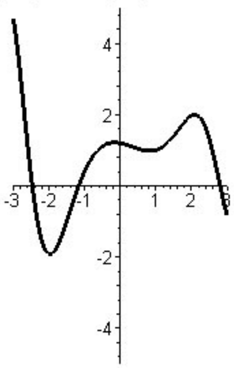


График f(x)+a, a<0

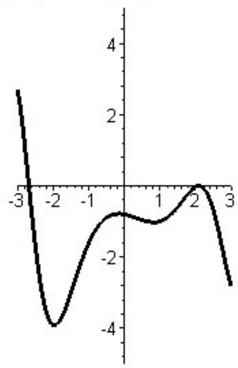


График f(x+a), a>0

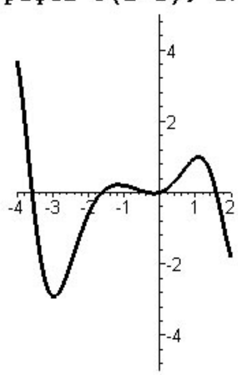


График f(x+a), a<0

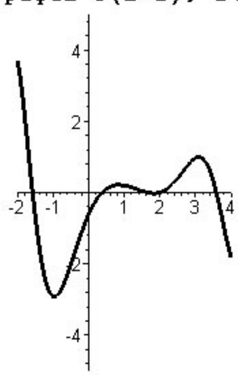


График −f(x)

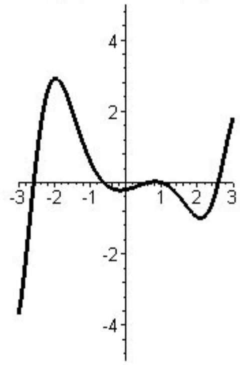


График f(−x)

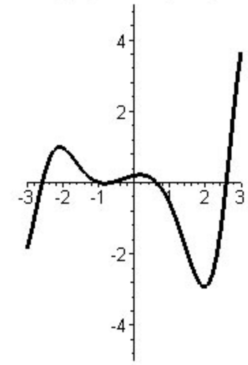


График af(x), a>1

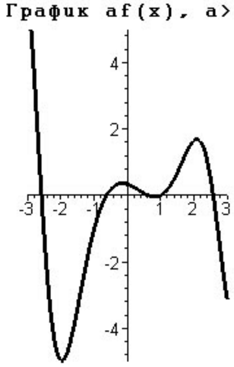


График af(x), 0<a<1

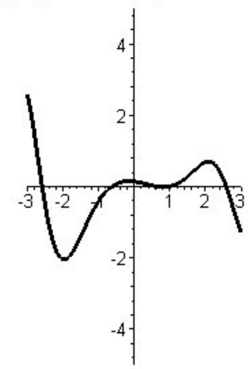


График f(ax), a>1

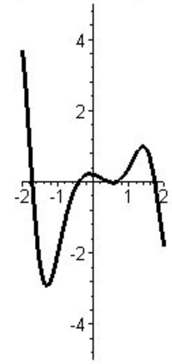
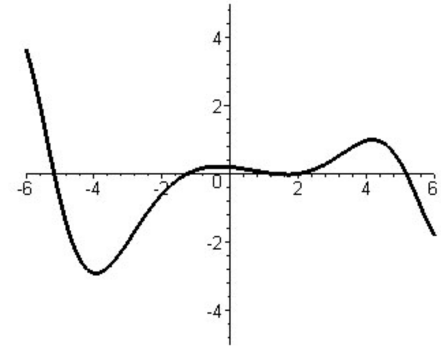


График f(ax), 0<a<1



Содержание

Навчальне видання

Ігнатович Світлана Юріївна
Голіцина Майя Олександрівна
Плетньова Олена Олександрівна

Математичний практикум

Методичний посібник з курсу «Математический практикум»
для студентів 1 курсу механіко-математичного факультету

(Рос. мовою)

Коректор *А. І. Седих*
Комп'ютерне верстання *С. Ю. Ігнатович*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x80/16. Ум. друк. арк. 1,8. Тираж 50 пр. Зам. № 142/12

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, Харків, пл. Свободи, 4
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32