

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

С.Ю. Игнатович, Р.Б. Райхцаум

**“Метод Галеркина решения линейных граничных
задач для обыкновенных дифференциальных
уравнений второго порядка”**

Методические указания
к лабораторной работе по курсу “Методы вычислений”
для студентов 4 курса механико-математического факультета
(специальность: прикладная математика)

Харьков – 2006

УДК 519.624(076.5)
ББК 22.193
И 26

Утверждено на заседании кафедры дифференциальных уравнений и управления механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина (протокол № 23 от 31.08.2006)

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и управления Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина Сохин А.С.

Игнатович С.Ю., Райхцаум Р.Б. “Метод Галеркина решения линейных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”: Методиче-

И 26 ские указания к лабораторной работе по курсу “Методы вычислений” для студентов 4 курса механико-математического факультета (специальность: прикладная математика). – Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2006. – 36 с.

Цель данной разработки – помочь студентам при выполнении лабораторной работы по теме “Метод Галеркина решения линейных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”.

На модельных примерах рассмотрен метод Галеркина. Методические указания снабжены упражнениями. Приведены рекомендации по реализации метода. Предложены варианты лабораторных заданий.

УДК 519.624(076.5)
ББК 22.193

@ Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина, 2006

@ Игнатович С.Ю., 2006

@ Макет обложки Дончик И.Н., 2006

Содержание

Введение	4
§1. Метод Галеркина	5
§2. Примеры	6
Пример 1	7
Пример 2	21
Заключительные замечания	26
§3. Задания для лабораторной работы	28
Постановка задачи	28
Рекомендации по выполнению лабораторной работы	29
Список литературы	31
Варианты заданий	32

Введение

Настоящие методические указания предназначены для практического применения знаний, полученных студентами при изучении темы “Метод Галеркина решения линейных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”. Теоретическая база метода со всеми необходимыми доказательствами приведена в методическом пособии [1] “Численное решение граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений” (авторы Сохин А.С., Скорик В.А., Харьков, 2004. – 28 с.) Как показывает опыт, изучение метода Галеркина зачастую вызывает трудности у студентов. Цель данного пособия – на простых примерах обсудить детали применения этого метода и дать рекомендации по выполнению соответствующей лабораторной работы.

Параграф 1 содержит некоторые вводные замечания, связанные с методом Галеркина.

В параграфе 2 приведены демонстрационные задачи и детальное обсуждение их решения.

В параграфе 3 сформулированы задания для лабораторных работ. Получив вариант задания для выполнения, студент должен изучить раздел “Метод Галеркина” из пособия [1] и параграф 2 настоящего пособия. При необходимости можно воспользоваться дополнительной литературой (см. список литературы на странице 31). Подробные рекомендации по выполнению лабораторной работы приведены в параграфе 3 на странице 29.

Отчет о выполненном лабораторном задании следует сдать в сроки, указанные преподавателем. На первой странице отчета студент указывает название и номер варианта лабораторного задания, а также свою фамилию и номер группы. Отчет должен содержать:

- постановку задачи,
- теоретические исследования,
- текст программы,
- результаты счета,
- анализ полученных результатов.

Авторы данного пособия надеются, что предлагаемая форма изложения окажется достаточно удобной для восприятия учебного материала, и будут признательны за критические замечания и предложения.

§1. Метод Галеркина

Данные методические указания посвящены построению приближенного решения линейной граничной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Самый распространенный подход к решению таких задач предусматривает применение конечно-разностных методов для нахождения приближенного решения. Этот подход реализован в методе сеток. Коротко напомним его содержание. Первую и вторую производные решения дифференциального уравнения заменяют соответствующими конечными разностями. Тогда исходная дифференциальная задача заменяется разностной задачей. Как известно, такая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции на заданном множестве точек, называемом *сеткой*. Отсюда и название метода – метод сеток. Матрица этой системы уравнений трехдиагональная. Для решения таких систем обычно используют метод прогонки.

Однако существуют и другие подходы к решению таких задач. Целью данного пособия является рассмотрение метода Галеркина решения линейной граничной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Изложение этого метода можно найти в методическом пособии [1], а также в книгах [2] – [5]. В бесконечномерном функциональном пространстве (например, в пространстве Соболева $W_2^1(a, b) = \{u(x) : u'(x) \in L_2[a, b]\}$) рассматривают систему базисных функций. Эту систему выбирают из разных соображений, например, исходя из физического смысла задачи или принимая во внимание удобство работы с ней. В данном пособии в качестве базисных функций выбраны базисные линейные сплайны. Использование этого базиса позволило свести нахождение решения дифференциальной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Как известно, специальное расположение ненулевых элементов в трехдиагональной матрице позволяет получить простые расчетные формулы для нахождения решения.

В методе Галеркина решение граничной задачи аппроксимируется конечной линейной комбинацией базисных функций. Другими словами, мы рассматриваем решение как лежащее в некотором бесконечномерном функциональном пространстве и пытаемся построить приближенное решение, которое лежит в конечномерном подпространстве, определяемом конеч-

ным набором базисных функций. “Проекция” точного решения на это подпространство и есть приближенное решение. Поэтому метод Галеркина относят к группе так называемых “проекционных” методов.

Метод Галеркина представляет собой *аналитический* метод, дающий возможность найти приближенное решение линейной граничной задачи в виде *аналитического выражения*. Таким образом, приближенное решение определено на всем отрезке $[a, b]$. Это выгодно отличает метод Галеркина от метода сеток, в котором приближенное решение определяется только в заданных узлах, так что для построения решения в других точках отрезка необходимо дополнительно использовать интерполяцию.

Численная реализация метода Галеркина будет предметом нашего рассмотрения.

§2. Примеры

Материал, изложенный в данном параграфе, носит теоретический характер, хотя в нем нет ни формулировок теорем, ни доказательств.

На примере двух задач покажем особенности применения метода Галеркина. Разобранные примеры отличаются граничными условиями. Заметим, что схема вычислений одна и та же, но необходимо учесть особенности граничных условий.

На модельных примерах 1 и 2 подробно разобрано выполнение одного шага метода Галеркина. Однако для того, чтобы найти приближенное решение *с заданной точностью*, необходимо выполнять такие шаги, увеличивая количество узлов и оценивая при этом погрешность. Некоторые рекомендации по этому вопросу приведены в параграфе 3.

Метод Галеркина требует вычисления определенных интегралов. Модельные примеры подобраны так, чтобы интегралы, возникающие в процессе решения задачи, можно было находить в явном виде (непосредственным вычислением первообразной). Однако, в общем случае необходимо применить численное интегрирование, используя, например, формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона или Гаусса. Удобно использовать формулу Симпсона, которая в силу своей сравнительно высокой точности и простоты часто применяется в качестве метода численного интегрирования. В рассматриваемых примерах вычисление некоторых интегралов вы-

несено в раздел упражнений. “Активное” чтение с выполнением упражнений поможет читателю лучше разобраться в особенностях предлагаемых примеров и метода в целом.

Пример 1. Найти приближенное решение граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - x y(x) = -1, \quad 0.5 < x < 1, \quad (1)$$

$$y'(0.5) = -4, \quad (2)$$

$$y'(1) + y(1) = 1. \quad (3)$$

Решение. Отметим, что рассматриваемая задача линейная, так как уравнения (1) – (3) линейны относительно функции $y(x)$ и ее производных. Перепишем задачу в общем виде:

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + q_1(x)y(x) = f_1(x), \quad a < x < b, \quad (4)$$

$$-y'(a) + \mu_0 y(a) = m_0, \quad (5)$$

$$y'(b) + \mu_1 y(b) = m_1, \quad (6)$$

где

$$p_1(x) = \frac{2}{x}, \quad q_1(x) = -x, \quad f_1(x) = -1, \quad a = 0.5, \quad b = 1, \\ \mu_0 = 0, \quad m_0 = 4, \quad \mu_1 = 1, \quad m_1 = 1.$$

Приведем уравнение (4) к дивергентному виду

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b. \quad (7)$$

Для этого умножим обе его части на функцию $-e^{\int_a^x p_1(s)ds}$. Учитывая, что

$$\left(e^{\int_a^x p_1(s)ds} y' \right)' = e^{\int_a^x p_1(s)ds} (y'' + p_1(x)y'),$$

получаем из (4)

$$-\left(e^{\int_a^x p_1(s)ds} y' \right)' - e^{\int_a^x p_1(s)ds} q_1(x)y = -e^{\int_a^x p_1(s)ds} f_1(x).$$

Обозначая $p(x) \equiv e^{\int_a^x p_1(s)ds}$, $q(x) \equiv -p(x)q_1(x)$, $f(x) \equiv -p(x)f_1(x)$, получаем (7).

В нашем случае имеем

$$p(x) = e^{2(\ln x - \ln 0.5)} = e^{2\ln(2x)} = 4x^2,$$

$$q(x) = -(-x) \cdot 4x^2 = 4x^3,$$

$$f(x) = -(-1) \cdot 4x^2 = 4x^2.$$

Получаем дифференциальное уравнение в дивергентной форме

$$-(4x^2 y')' + 4x^3 y = 4x^2, \quad 0.5 < x < 1.$$

Таким образом, исходная задача (4), (5), (6) сводится к решению эквивалентной граничной задачи

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b, \quad (8)$$

$$-y'(a) + \mu_0 y(a) = m_0, \quad (9)$$

$$y'(b) + \mu_1 y(b) = m_1. \quad (10)$$

Для нашего примера

$$p(x) = 4x^2, \quad q(x) = 4x^3, \quad f(x) = 4x^2, \quad a = 0.5, \quad b = 1,$$

$$\mu_0 = 0, \quad m_0 = 4, \quad \mu_1 = 1, \quad m_1 = 1,$$

следовательно, задача (1) – (3) сводится к задаче

$$Ly = -(4x^2 y')' + 4x^3 y = 4x^2, \quad 0.5 < x < 1, \quad (11)$$

$$-y'(0.5) = 4, \quad (12)$$

$$y'(1) + y(1) = 1. \quad (13)$$

В методе Галеркина приближенное решение граничной задачи (8), (9), (10) ищется в виде

$$y_N(x) = \sum_{i=0}^N \xi_i \varphi_i(x), \quad (14)$$

где $\varphi_0(x), \dots, \varphi_N(x)$ – так называемая галеркинская система функций, а ξ_0, \dots, ξ_N – неизвестные коэффициенты, которые находятся из условий

$$(Ly, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, \dots, N.$$

Здесь (\cdot, \cdot) означает скалярное произведение в $L_2[a, b]$. Вообще говоря, чем больше N , т.е. чем больше функций φ_i используется для построения приближенного решения (14), тем точнее это приближенное решение.

Замечание. Обычно галеркинской системой называется полная линейно независимая система функций, которая используется в методе Галеркина. При конкретной численной реализации используется конечная подсистема этой системы, которая тоже называется галеркинской системой функций.

В качестве галеркинской системы функций выберем базисные линейные сплайны. Как известно [1], они определяются равенствами

$$\varphi_i(x) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b - a}{N}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (15)$$

где базисная функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \quad (16)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h}, & \text{при } \frac{|x - x_i|}{h} \leq 1, \\ 0, & \text{при } \frac{|x - x_i|}{h} > 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h}, & \text{при } |x - x_i| \leq h, \\ 0, & \text{при } |x - x_i| > h \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h}, & \text{при } x_i - h \leq x \leq x_i, \\ 1 - \frac{x - x_i}{h}, & \text{при } x_i < x \leq x_i + h, \\ 0, & \text{при } |x - x_i| > h. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что функция $\varphi_i(x)$ негладкая, а именно, в точках $x_i - h$, x_i и $x_i + h$ она недифференцируема (хотя имеет правую и левую производные). В остальных точках отрезка $[a, b]$ ее производная имеет следующий вид:

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{при } x_i - h < x < x_i, \\ -\frac{1}{h}, & \text{при } x_i < x < x_i + h, \\ 0, & \text{при } |x - x_i| > h. \end{cases} \quad (18)$$

Таким образом, базисные линейные сплайны *кусочно-линейны* (иногда их называют “функции-крышки”), а их производные *кусочно-постоянны*.

Графики функций $\varphi_i(x)$ и $\varphi'_i(x)$ представлены на рисунке 1. Как легко видеть, приближенное решение $y_N(x)$, имеющее вид (14), *также кусочно-линейно*, а именно, $y_N(x) = \xi_i \varphi_i(x) + \xi_{i+1} \varphi_{i+1}(x)$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$.

Очевидно, что выбранная система базисных функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ такова, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_N(x)$ удовлетворяют неоднородным граничным условиям, а остальные функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{N-1}(x)$ нулевым граничным условиям, а именно,

$$\begin{aligned} \varphi_0(a) &= 1, & \varphi_0(b) &= 0, \\ \varphi_i(a) &= 0, & \varphi_i(b) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ \varphi_N(a) &= 0, & \varphi_N(b) &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Из совместного рассмотрения графиков функций φ_i и φ'_i видно, что:

- 1) φ_0, φ'_0 и φ_N, φ'_N имеют ненулевые значения только на одном “элементарном промежутке” $[a, x_1]$ или $[x_{N-1}, b]$;
- 2) φ_i и φ'_i при $i = 1, \dots, N-1$ имеют ненулевые значения только на двух смежных “элементарных промежутках” $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$;
- 3) на каждом “элементарном промежутке” $[x_i, x_{i+1}]$ ненулевыми являются только две “соседние” базисные функции φ_i и φ_{i+1} и их производные φ'_i и φ'_{i+1} .

Теперь обратимся к рассмотрению (Ly, φ) , где

$$\varphi \in H \equiv W_2^1(a, b) = \{\varphi(x) : \varphi' \in L_2[a, b]\}.$$

Подставляя выражение для Ly из (8) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} (Ly, \varphi) &= -(py')' + qy, \varphi = -(py')', \varphi + (qy, \varphi) = \\ &= \int_a^b \left[-(p(x)y'(x))' \varphi(x) \right] dx + (qy, \varphi) = \\ &= -p(x)y'(x)\varphi(x) \Big|_a^b + \int_a^b p(x)y'(x)\varphi'(x) dx + (qy, \varphi) = (py', \varphi') + (qy, \varphi) - py' \varphi \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Следуя [1], обозначим

$$B(y, \varphi) = (py', \varphi') + (qy, \varphi). \quad (20)$$

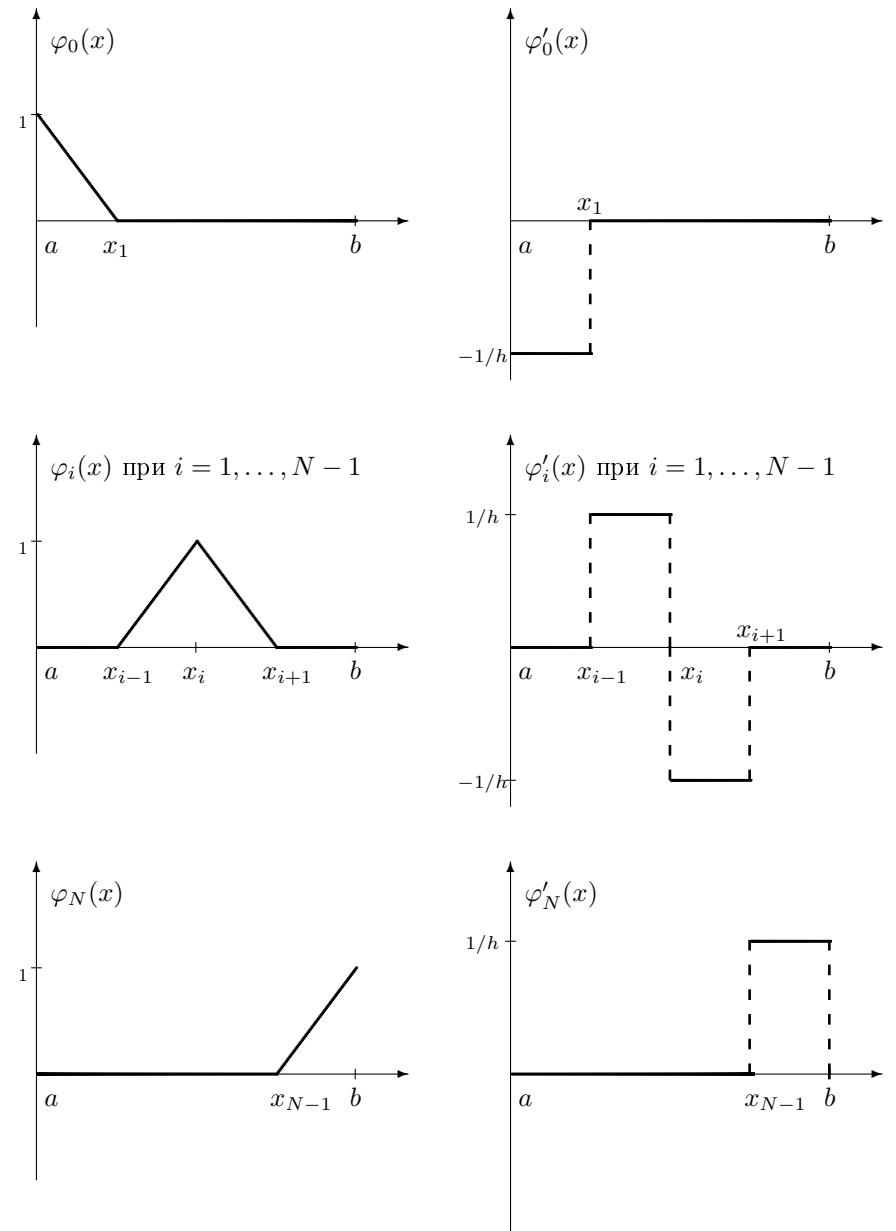


Рис. 1: Графики функций $\varphi_i(x)$ и $\varphi'_i(x)$.

Тогда

$$(Ly, \varphi) = B(y, \varphi) - py' \varphi \Big|_a^b = B(y, \varphi) - p(b)y'(b)\varphi(b) + p(a)y'(a)\varphi(a). \quad (21)$$

Пусть $y(x)$ – решение задачи (8) – (10). Тогда $Ly = f(x)$, а следовательно,

$$(Ly, \varphi) = (f, \varphi) \quad (22)$$

Учитывая (21),(22), получим

$$B(y, \varphi) - p(b)y'(b)\varphi(b) + p(a)y'(a)\varphi(a) = (f, \varphi)$$

для любого $\varphi \in H$.

В частности, последнее равенство справедливо для всех $\varphi = \varphi_k(x)$ (см.(15)), т.е.

$$B(y, \varphi_k) - p(b)y'(b)\varphi_k(b) + p(a)y'(a)\varphi_k(a) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, \dots, N.$$

Учитывая (19), получаем

$$\begin{aligned} B(y, \varphi_0) + p(a)y'(a) &= (f, \varphi_0), \\ B(y, \varphi_k) &= (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \\ B(y, \varphi_N) - p(b)y'(b) &= (f, \varphi_N). \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку по нашему предположению функция $y(x)$ – решение задачи (8)–(10), то, в частности, она удовлетворяет граничным условиям (9), (10), т.е.

$$y'(a) = \mu_0 y(a) - m_0, \quad y'(b) = -\mu_1 y(b) + m_1. \quad (24)$$

Подставляя эти выражения в систему (23), получаем

$$\begin{aligned} B(y, \varphi_0) + \mu_0 p(a)y(a) &= m_0 p(a) + (f, \varphi_0), \\ B(y, \varphi_k) &= (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \\ B(y, \varphi_N) + \mu_1 p(b)y(b) &= m_1 p(b) + (f, \varphi_N). \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно методу Галеркина, приближенное решение $y_N(x)$ вида (14) задачи (8) – (10), которая эквивалентна исходной задаче (4) – (6), определяется из равенств (25). А именно, подставляя $y = y_N(x) = \sum_{i=0}^N \xi_i \varphi_i(x)$ в (25), получим галеркинскую СЛАУ относительно неизвестных $\xi_i, i = 0, 1, \dots, N$.

Тогда имеем $B(y_N, \varphi_k) = \sum_{i=0}^N \xi_i B(\varphi_i, \varphi_k)$, $k = 0, \dots, N$. Кроме того, принимая во внимание (19), получаем

$$y_N(a) = \sum_{i=0}^N \xi_i \varphi_i(a) = \xi_0, \quad y_N(b) = \sum_{i=0}^N \xi_i \varphi_i(b) = \xi_N.$$

Для удобства обозначим $p_0 = p(a)$, $p_N = p(b)$. Окончательно, галеркинская СЛАУ имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N B(\varphi_i, \varphi_0) \xi_i + \mu_0 p_0 \xi_0 &= m_0 p_0 + (f, \varphi_0), \\ \sum_{i=0}^N B(\varphi_i, \varphi_k) \xi_i &= (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \\ \sum_{i=0}^N B(\varphi_i, \varphi_N) \xi_i + \mu_1 p_N \xi_N &= m_1 p_N + (f, \varphi_N). \end{aligned} \quad (26)$$

Исследуем матрицу полученной системы. По определению $B(y, \varphi)$ (см. (20)),

$$\begin{aligned} B(\varphi_i, \varphi_k) &= (p\varphi'_i, \varphi'_k) + (q\varphi_i, \varphi_k) = \\ &= \int_a^b p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_k(x) dx + \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx, \quad i, k = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Очевидно, что $B(\varphi_i, \varphi_k) = B(\varphi_k, \varphi_i)$. Поэтому рассмотрим случай $k \leq i$.

Далее мы учитываем свойства функций φ_i и их производных φ'_i . При $k = i$ для $k = 1, \dots, N-1$ имеем

$$\begin{aligned} B(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_a^b p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx + \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx + \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Упражнение. Вычислить значения $B(\varphi_0, \varphi_0)$, $B(\varphi_N, \varphi_N)$.

При $k = i-1$, $k = 0, \dots, N-1$,

$$B(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_a^b p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx + \int_a^b q(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i-1}(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx. \quad (28)$$

Очевидно, что при $k \leq i - 2$, $k = 0, 1, \dots, N - 2$ имеем $B(\varphi_i, \varphi_k) = 0$.

При $k > i$, как отмечено выше, можно получить аналогичные выражения для $B(\varphi_i, \varphi_k)$.

Таким образом, система (26) принимает вид

$$\begin{aligned} B(\varphi_0, \varphi_0)\xi_0 + B(\varphi_1, \varphi_0)\xi_1 + \mu_0 p_0 \xi_0 &= (f, \varphi_0) + m_0 p_0, \\ B(\varphi_{k-1}, \varphi_k)\xi_{k-1} + B(\varphi_k, \varphi_k)\xi_k + B(\varphi_{k+1}, \varphi_k)\xi_{k+1} &= (f, \varphi_k), \\ k &= 1, \dots, N - 1, \\ B(\varphi_{N-1}, \varphi_N)\xi_{N-1} + B(\varphi_N, \varphi_N)\xi_N + \mu_1 p_N \xi_N &= (f, \varphi_N) + m_1 p_N. \end{aligned} \quad (29)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_k &= B(\varphi_{k-1}, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N, \\ B_k &= B(\varphi_k, \varphi_k), \quad k = 0, \dots, N, \\ C_k &= B(\varphi_{k+1}, \varphi_k) = A_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N - 1, \\ D_0 &= m_0 p_0 + (f, \varphi_0), \\ D_k &= (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N - 1, \\ D_N &= m_1 p_N + (f, \varphi_N). \end{aligned} \quad (30)$$

В этих обозначениях система (29) принимает вид

$$\begin{aligned} (B_0 + \mu_0 p_0)\xi_0 + C_0 \xi_1 &= D_0, \\ A_k \xi_{k-1} + B_k \xi_k + C_k \xi_{k+1} &= D_k, \quad k = 1, \dots, N - 1, \\ A_N \xi_{N-1} + (B_N + \mu_1 p_N)\xi_N &= D_N. \end{aligned} \quad (31)$$

Очевидно, эта система имеет трехдиагональную матрицу. Напомним, что для таких систем существует удобный метод нахождения *точного* решения, который называется методом прогонки [1]. По существу, это частный случай метода исключений (метода Гаусса). Особенностью метода прогонки является то, что погрешности, допускаемые в процессе вычислений,

не накапливаются. Поэтому с ростом размерности системы вычислительная погрешность, вообще говоря, не возрастает. Кроме того, количество выполняемых арифметических действий невелико, а именно, имеет такой же порядок, как и размерность системы (напомним, что в стандартном методе Гаусса для системы размерности n требуется выполнить порядка n^3 арифметических действий).

Для применения метода прогонки перепишем первое и последнее уравнения системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= k_0\xi_1 + n_0, \\ \xi_N &= k_1\xi_{N-1} + n_1,\end{aligned}$$

где

$$k_0 = -\frac{C_0}{B_0 + \mu_0 p_0}, \quad n_0 = \frac{D_0}{B_0 + \mu_0 p_0}, \quad (32)$$

$$k_1 = -\frac{A_N}{B_N + \mu_1 p_N}, \quad n_1 = \frac{D_N}{B_N + \mu_1 p_N}. \quad (33)$$

Тогда вычислительная схема метода прогонки имеет следующий вид:

Прямой ход:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= k_0, & \beta_0 &= n_0, \\ \alpha_i &= -\frac{C_i}{B_i + A_i\alpha_{i-1}}, & \beta_i &= \frac{D_i - A_i\beta_{i-1}}{B_i + A_i\alpha_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, N-1,\end{aligned} \quad (34)$$

Обратный ход:

$$\xi_N = \frac{n_1 + k_1\beta_{N-1}}{1 - k_1\alpha_{N-1}}, \quad \xi_i = \alpha_i\xi_{i+1} + \beta_i, \quad i = N-1, \dots, 0. \quad (35)$$

Вернемся к рассмотрению задачи (11) – (13) и реализуем *один шаг* метода Галеркина. Возьмем $N = 4$, т.е. будем искать приближенное решение в виде $y(x) \approx \sum_{i=0}^4 \xi_i \varphi_i(x)$. Графики функций $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ схематически изображены на рисунке 2.

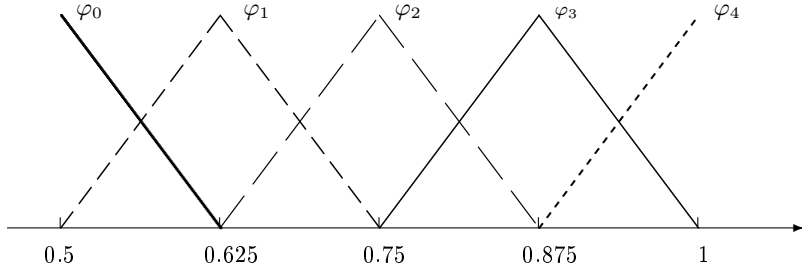


Рис. 2: Схематическое изображение графиков функций $\varphi_0, \dots, \varphi_4$.

Система для нахождения коэффициентов ξ_0, \dots, ξ_4 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= k_0 \xi_1 + n_0, \\
 A_1 \xi_0 + B_1 \xi_1 + C_1 \xi_2 &= D_1, \\
 A_2 \xi_1 + B_2 \xi_2 + C_2 \xi_3 &= D_2, \\
 A_3 \xi_2 + B_3 \xi_3 + C_3 \xi_4 &= D_3, \\
 \xi_4 &= k_1 \xi_3 + n_1.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Вычислим коэффициенты этой системы. По определению (см. (30), (32), (33)),

$$k_0 = -\frac{C_0}{B_0 + \mu_0 p_0} = -\frac{B(\varphi_1, \varphi_0)}{B(\varphi_0, \varphi_0) + \mu_0 p_0}, \quad n_0 = \frac{D_0}{B_0 + \mu_0 p_0} = \frac{m_0 p_0 + (f, \varphi_0)}{B(\varphi_0, \varphi_0) + \mu_0 p_0},$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= C_0 = B(\varphi_1, \varphi_0), & A_2 &= C_1, & A_3 &= C_2, \\
 B_1 &= B(\varphi_1, \varphi_1), & B_2 &= B(\varphi_2, \varphi_2), & B_3 &= B(\varphi_3, \varphi_3), \\
 C_1 &= B(\varphi_2, \varphi_1), & C_2 &= B(\varphi_3, \varphi_2), & C_3 &= A_4 = B(\varphi_4, \varphi_3), \\
 D_1 &= (f, \varphi_1), & D_2 &= (f, \varphi_2), & D_3 &= (f, \varphi_3),
 \end{aligned}$$

$$k_1 = -\frac{A_4}{B_4 + \mu_1 p_4} = -\frac{B(\varphi_4, \varphi_3)}{B(\varphi_4, \varphi_4) + \mu_1 p_4}, \quad n_1 = \frac{D_4}{B_4 + \mu_1 p_4} = \frac{m_1 p_4 + (f, \varphi_4)}{B(\varphi_4, \varphi_4) + \mu_1 p_4}.$$

Напомним, что в нашей задаче $a = 0.5$, $b = 1$,

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0.5}{4} = 0.125, \quad x_i = a + ih = 0.5 + i \cdot 0.125, \quad i = 0, \dots, 4,$$

$$p(x) = 4x^2, \quad q(x) = 4x^3, \quad f(x) = 4x^2,$$

$$\mu_0 = 0, \quad m_0 = 4, \quad \mu_1 = 1, \quad m_1 = 1.$$

Будем пользоваться формулами (17), (18). Итак,

$$\begin{aligned} C_0 &= B(\varphi_1, \varphi_0) = \int_{0.5}^1 p(x)\varphi_1'(x)\varphi_0'(x)dx + \int_{0.5}^1 q(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)dx = \\ &= \int_{0.5}^{0.625} 4x^2 \frac{1}{0.125} \left(-\frac{1}{0.125}\right) dx + \int_{0.5}^{0.625} 4x^3 \left(1 + \frac{x-0.625}{0.125}\right) \left(1 - \frac{x-0.5}{0.125}\right) dx \approx \\ &\approx -10.151741; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= B(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{0.5}^1 p(x)\varphi_0'(x)\varphi_0'(x)dx + \int_{0.5}^1 q(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)dx = \\ &= \int_{0.5}^{0.625} 4x^2 \left(-\frac{1}{0.125}\right)^2 dx + \int_{0.5}^{0.625} 4x^3 \left(1 - \frac{x-0.5}{0.125}\right)^2 dx \approx 10.191803. \end{aligned}$$

Отсюда

$$k_0 = -\frac{C_0}{B_0} \approx \frac{10.151741}{10.191803} \approx 0.996069.$$

Переходим к вычислению $n_0 = \frac{D_0}{B_0}$:

$$\begin{aligned} D_0 &= 4 + \int_{0.5}^1 f(x)\varphi_0(x)dx = 4 + \int_{0.5}^{0.625} 4x^2 \left(1 - \frac{x-0.5}{0.125}\right) dx \approx \\ &\approx 4 + 0.073568 = 4.073568, \end{aligned}$$

следовательно,

$$n_0 = \frac{D_0}{B_0} \approx \frac{4.073568}{10.191803} \approx 0.399691.$$

Найдем теперь A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Как показано выше, $A_1 = C_0 \approx -10.151741$. Далее, имеем

$$\begin{aligned}
 B_1 = B(\varphi_1, \varphi_1) &= \int_{0.5}^1 p(x)\varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx + \int_{0.5}^1 q(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx = \\
 &= \int_{0.5}^{0.625} 4x^2 \left(\frac{1}{0.125} \right)^2 dx + \int_{0.625}^{0.75} 4x^2 \left(-\frac{1}{0.125} \right)^2 dx + \\
 &+ \int_{0.5}^{0.625} 4x^3 \left(1 + \frac{x-0.625}{0.125} \right)^2 dx + \int_{0.625}^{0.75} 4x^3 \left(1 - \frac{x-0.625}{0.125} \right)^2 dx \approx \\
 &\approx 25.415688,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 = B(\varphi_2, \varphi_1) &= \int_{0.5}^1 p(x)\varphi_2'(x)\varphi_1'(x)dx + \int_{0.5}^1 q(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)dx = \\
 &= \int_{0.625}^{0.75} 4x^2 \left(-\left(\frac{1}{0.125} \right)^2 \right) dx + \int_{0.625}^{0.75} 4x^3 \left(1 + \frac{x-0.75}{0.125} \right) \left(1 - \frac{x-0.625}{0.125} \right) dx \approx \\
 &\approx -15.166668 + 0.027213 \approx -15.139455,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 = (f, \varphi_1) &= \int_{0.5}^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_{0.5}^{0.625} 4x^2 \left(1 + \frac{x-0.625}{0.125} \right) dx + \\
 &+ \int_{0.625}^{0.75} 4x^2 \left(1 - \frac{x-0.625}{0.125} \right) dx \approx 0.196614.
 \end{aligned}$$

Упражнение. Вычислить коэффициенты A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , A_3 , B_3 , C_3 , D_3 , k_1 , n_1 . Ответы см. в таблице 1.

		$k_0 \approx 0.996069$	$n_0 \approx 0.399691$
$A_1 \approx -10.151741$	$B_1 \approx 25.415688$	$C_1 \approx -15.139455$	$D_1 \approx 0.196614$
$A_2 \approx -15.139455$	$B_2 \approx 36.475075$	$C_2 \approx -21.121809$	$D_2 \approx 0.282554$
$A_3 \approx -21.121809$	$B_3 \approx 49.558024$	$C_3 \approx -28.097809$	$D_3 \approx 0.384112$
		$k_1 \approx 0.869404$	$n_1 \approx 0.130879$

Таблица 1: Коэффициенты и правые части СЛАУ (36).

Решая систему (36) методом прогонки по формулам (34),(35), получаем

$$\xi_0 \approx 2.756392,$$

$$\xi_1 \approx 2.366002,$$

$$\xi_2 \approx 2.110695,$$

$$\xi_3 \approx 1.935688,$$

$$\xi_4 \approx 1.813774.$$

Итак, для любого $x \in [0.5, 1]$ приближенное значение $y(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
y(x) \approx y_4(x) &= \sum_{i=0}^4 \xi_i \varphi_i(x) \approx \\
&\approx 2.756392 \varphi_0(x) + 2.366002 \varphi_1(x) + 2.110695 \varphi_2(x) + \\
&+ 1.935688 \varphi_3(x) + 1.813774 \varphi_4(x).
\end{aligned}$$

График приближенного решения $y_4(x)$ изображен на рисунке 3 (на стр. 20).

Таким образом, мы выполнили *один шаг* метода Галеркина для решения задачи (11) – (13), которая эквивалентна исходной задаче (1) – (3) (при $N = 4$).

Заметим, что в силу условий (19) выполняются равенства $y_4(x_i) = \xi_i$, где $x_i = a + ih = 0.5 + i \cdot 0.125$, $i = 0, \dots, 4$. Другими словами, значения ξ_i , полученные выше, дают приближенные значения $y(x)$ в узловых точках x_i . Эти значения приведены в таблице 2 на странице 20. Здесь же для сравнения приведены результаты приближенного решения рассматриваемой граничной задачи (1) – (3), полученные методом сеток (при начальном значении $N = 4$).

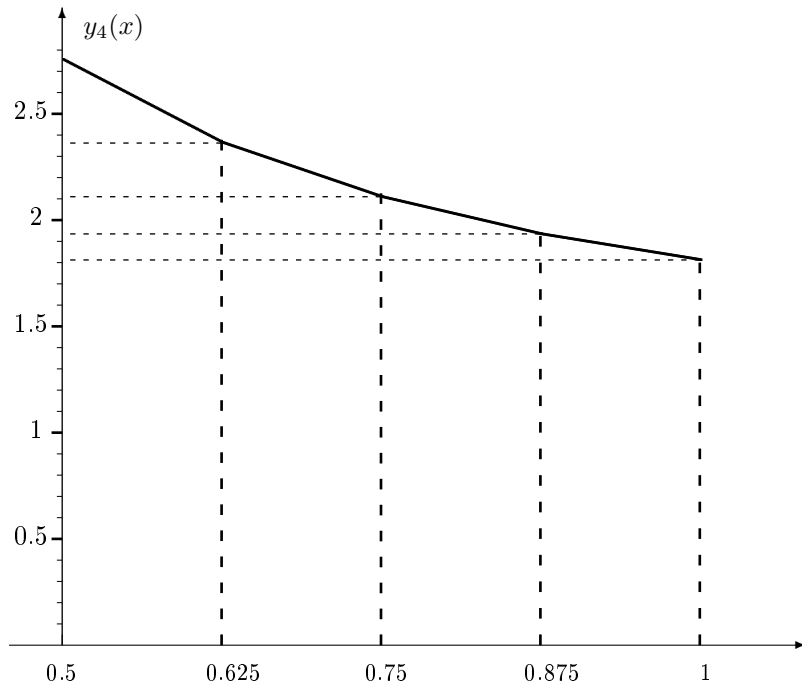


Рис. 3: График приближенного решения $y_4(x)$ задачи (1) – (3).

$y(x_i)$	Значения, полученные в результате выполнения одного шага метода Галеркина	Значения, полученные в результате выполнения одного шага метода сеток	Значения, полученные методом сеток с точностью 10^{-4}
$y(x_0)$	2.756392	2.855321	2.769805
$y(x_1)$	2.366002	2.429643	2.372627
$y(x_2)$	2.110695	2.152609	2.114177
$y(x_3)$	1.935688	1.962958	1.937461
$y(x_4)$	1.813774	1.830530	1.814477

Таблица 2: Приближенное решение задачи (1) – (3).

В результатах, приведенных в последнем столбце таблицы, заданная точность $\varepsilon = 10^{-4}$ достигается при $N = 256$ на шестом шаге метода сеток (напомним, что мы взяли на первом шаге метода сеток $N = 4$, как и в методе Галеркина).

Интересно отметить, что в этом примере метод Галеркина уже на первом шаге дает лучшее приближение, чем метод сеток, при одинаковом количестве узлов $N = 4$.

Заметим, что в вышеприведенных вычислениях все численные результаты содержат 6 цифр после десятичной запятой. Это связано с тем, что в таблице 2 проведено сравнение этих результатов с результатами, полученными методом сеток с точностью 10^{-4} . В связи с этим напомним, что при вычислениях с заданной точностью 10^{-k} обычно сохраняют $k + 1$ или $k + 2$ цифры после десятичной запятой.

Пример 2. Модифицируем граничную задачу из примера 1, а именно, изменим граничное условие на правом конце отрезка $[a, b]$: вместо граничного условия Робена рассмотрим условие Дирихле $y(b) = m_1$. Итак, решаем задачу

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - x y(x) = -1, \quad 0.5 < x < 1, \quad (37)$$

$$y'(0.5) = -4, \quad (38)$$

$$y(1) = 1. \quad (39)$$

Решение. Перепишем задачу в общем виде, приведя дифференциальное уравнение к дивергентной форме:

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b, \quad (40)$$

$$-y'(a) + \mu_0 y(a) = m_0, \quad (41)$$

$$y(b) = m_1, \quad (42)$$

где

$$p(x) = 4x^2, \quad q(x) = 4x^3, \quad f(x) = 4x^2, \quad a = 0.5, \quad b = 1,$$

$$\mu_0 = 0, \quad m_0 = 4, \quad m_1 = 1.$$

В примере 1 при построении формул существенно использовалось то, что коэффициенты при $y'(a)$ и $y'(b)$ в условиях Робена (9), (10) отличны от нуля. Поэтому для решения задачи (40) – (42) требуется некоторая

модификация приведенных выше формул. Заметим, что все рассуждения примера 1 вплоть до вида системы (23) сохраняются. Однако переход от системы (23) к системе (25) возможен лишь в том случае, когда $y'(a), y'(b)$ можно выразить через $y(a), y(b)$ (см. (25)), что возможно, если граничные условия имеют тип Робена.

Для нашего примера (40) – (42) мы можем применить эти рассуждения для левой граничной точки a и получить все уравнения системы (25), кроме последнего:

$$\begin{aligned} B(y, \varphi_0) + \mu_0 p(a)y(a) &= m_0 p(a) + (f, \varphi_0), \\ B(y, \varphi_k) &= (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Дополняя эту систему условием Дирихле в правой граничной точке b , получаем систему уравнений относительно неизвестной функции $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} B(y, \varphi_0) + \mu_0 p(a)y(a) &= m_0 p(a) + (f, \varphi_0), \\ B(y, \varphi_k) &= (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1, \\ y(b) &= m_1. \end{aligned}$$

Как и в примере 1, ищем решение системы в виде $\varphi_N(x) = \sum_{i=0}^N \xi_i \varphi_i(x)$. Подставляя $y = y_N(x)$ в систему, принимая во внимание условия (19) и используя обозначения (30), получаем галеркинскую СЛАУ.

$$\begin{aligned} (B_0 + \mu_0 p_0)\xi_0 + C_0 \xi_1 &= D_0, \\ A_k \xi_{k-1} + B_k \xi_k + C_k \xi_{k+1} &= D_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \\ \xi_N &= m_1. \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь возможны два способа решения системы (43).

Первый способ. Так как ξ_N известно, то, подставив его значение в $(N-1)$ -ое уравнение системы, получим

$$A_{N-1} \xi_{N-2} + B_{N-1} \xi_{N-1} + C_{N-1} m_1 = D_{N-1},$$

откуда

$$A_{N-1} \xi_{N-2} + B_{N-1} \xi_{N-1} = D_{N-1} - C_{N-1} m_1.$$

Таким образом, имеем систему N уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{aligned}(B_0 + \mu_0 p_0)\xi_0 + C_0\xi_1 &= D_0, \\ A_k\xi_{k-1} + B_k\xi_k + C_k\xi_{k+1} &= D_k, \quad k = 1, \dots, N-2, \\ A_{N-1}\xi_{N-2} + B_{N-1}\xi_{N-1} &= D_{N-1} - C_{N-1}m_1\end{aligned}$$

относительно N неизвестных ξ_0, \dots, ξ_{N-1} .

Второй способ. Представив уравнение

$$\xi_N = m_1$$

в виде

$$\xi_N = k_1\xi_{N-1} + n_1, \quad \text{где } k_1 = 0, \quad n_1 = m_1,$$

мы можем в дальнейшем воспользоваться теми же расчетными формулами (34), (35), которые мы использовали в примере 1.

Воспользуемся вторым способом.

Для решения системы (43) методом прогонки перепишем первое и последнее уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= k_0\xi_1 + n_0, \\ \xi_N &= k_1\xi_{N-1} + n_1,\end{aligned}$$

где k_0, n_0 вычисляются, как и прежде (см.(32)), по формулам

$$k_0 = -\frac{C_0}{B_0 + \mu_0 p_0}, \quad n_0 = \frac{D_0}{B_0 + \mu_0 p_0},$$

а k_1 и n_1 определяются равенствами

$$k_1 = 0, \quad n_1 = m_1.$$

Тогда вычислительная схема метода прогонки имеет вид (34), (35).

Вернемся к рассмотрению граничной задачи (37) – (39). При $N = 4$ галеркинская система имеет, как и в примере 1, вид (36) с теми же коэффициентами, за исключением k_1 и n_1 , которые определяются равенствами

$k_1 = 0, n_1 = 1$, то есть

$$\begin{aligned} \xi_0 &= k_0 \xi_1 + n_0, \\ A_1 \xi_0 + B_1 \xi_1 + C_1 \xi_2 &= D_1, \\ A_2 \xi_1 + B_2 \xi_2 + C_2 \xi_3 &= D_2, \\ A_3 \xi_2 + B_3 \xi_3 + C_3 \xi_4 &= D_3, \\ \xi_4 &= 1. \end{aligned} \tag{44}$$

В таблице 3 приведены коэффициенты и правые части этой системы.

$k_0 \approx 0.996069$		$n_0 \approx 0.399691,$	
$A_1 \approx -10.15174$	$B_1 \approx 25.415688$	$C_1 \approx -15.139456$	$D_1 \approx 0.196614$
$A_2 \approx -15.139456$	$B_2 \approx 36.475075$	$C_2 \approx -21.121809$	$D_2 \approx 0.282554$
$A_3 \approx -21.121809$	$B_3 \approx 49.558024$	$C_3 \approx -28.097809$	$D_3 \approx 0.384112$

Таблица 3: Коэффициенты и правые части СЛАУ (44).

В результате решения системы (44) методом прогонки по формулам (34), (35), получаем:

$$\begin{aligned} \xi_0 &\approx 1.987936, \\ \xi_1 &\approx 1.594513, \\ \xi_2 &\approx 1.330829, \\ \xi_3 &\approx 1.141922, \\ \xi_4 &\approx 1.0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $x \in [0.5, 1]$ приближенное значение $y(x)$ определяется так:

$$\begin{aligned} y(x) &\approx y_4(x) = \sum_{i=0}^4 \xi_i \varphi_i(x) \approx \\ &\approx 1.987936 \varphi_0(x) + 1.594513 \varphi_1(x) + 1.330829 \varphi_2(x) + \\ &\quad + 1.141922 \varphi_3(x) + 1.0 \varphi_4(x). \end{aligned}$$

График приближенного решения $y_4(x)$ изображен на рисунке 4.

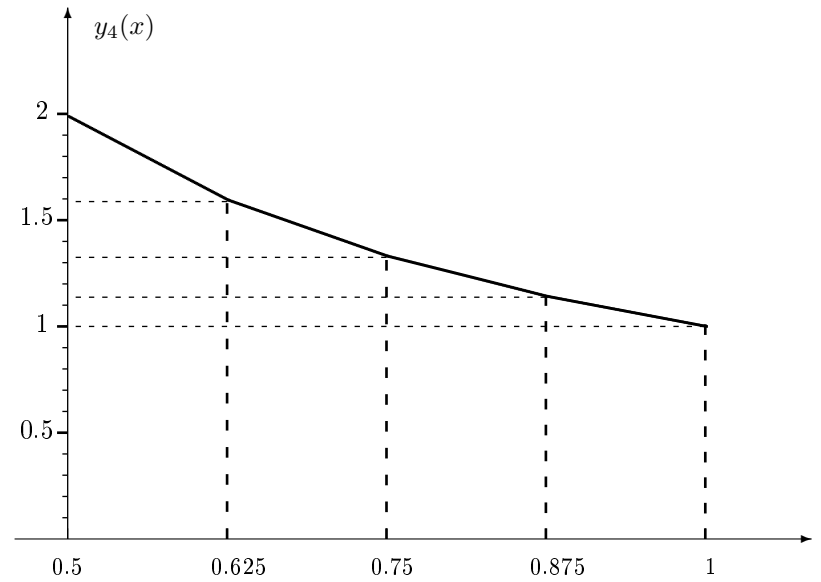


Рис. 4: График приближенного решения $y_4(x)$ задачи (37) – (39).

$y(x_i)$	Значения, полученные в результате выполнения одного шага метода Галеркина	Значения, полученные в результате выполнения одного шага метода сеток	Значения, полученные методом сеток с точностью 10^{-4}
$y(x_0)$	1.987936	2.069795	2.000029
$y(x_1)$	1.594513	1.641367	1.600017
$y(x_2)$	1.330829	1.356086	1.333343
$y(x_3)$	1.141922	1.152542	1.142861
$y(x_4)$	1.0	1.0	1.0

Таблица 4: Приближенное решение задачи (37) – (39).

Таким образом, мы выполнили *один шаг* метода Галеркина для решения задачи (37) – (39) (при $N = 4$).

Как и в примере 1, в силу условий (19) имеем $y_4(x_i) = \xi_i$, где $x_i = a + ih = 0.5 + i \cdot 0.125$, $i = 0, \dots, 4$, так что значения ξ_i , полученные выше, дают приближенные значения $y(x)$ в узловых точках x_i .

Эти значения приведены в таблице 4 на странице 25. Здесь же для сравнения приведены результаты приближенного решения рассматриваемой граничной задачи (37) – (39), полученные методом сеток (при начальном значении $N = 4$).

Заметим, что, как и в примере 1, в результатах, приведенных в последнем столбце таблицы, заданная точность $\varepsilon = 10^{-4}$ приближенного решения достигается при $N = 256$, т.е. на шестом шаге метода сеток (в методе сеток начальное приближение $N = 4$, как и в методе Галеркина). Здесь, как и в предыдущем примере, метод Галеркина уже на первом шаге дает лучшее приближение, чем метод сеток, при одинаковом количестве узлов $N = 4$.

Упражнение. Методом Галеркина (при $N = 4$) получить приближенные решения для следующих граничных задач:

$$\begin{aligned}
 1) \quad y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - x y(x) &= -1, & 0.5 < x < 1, \\
 y(0.5) &= -4, \\
 y'(1) + y(1) &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - x y(x) &= -1, & 0.5 < x < 1, \\
 y(0.5) &= -4, \\
 y(1) &= 1.
 \end{aligned}$$

Заключительные замечания. В данном параграфе рассмотрены две граничные задачи (1) – (3) и (37) – (39); они различаются граничными условиями. Приближенные решения этих задач были получены методами Галеркина и сеток. Результаты вынесены в таблицы 2 и 4.

Как было отмечено выше, и метод Галеркина, и метод сеток в конечном счете приводят к системам линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами (очевидно, матрицы получаемых систем различны). Для решения таких систем применяется метод прогонки, который

обладает достоинством малого числа необходимых арифметических действий и вычислительной устойчивостью.

В методе Галеркина нахождение коэффициентов СЛАУ сводится к вычислению интегралов. Примеры подобраны так, чтобы требуемые интегралы можно было находить в явном виде (непосредственным вычислением первообразной). Однако можно было воспользоваться и приближенным методом, например, методом Симпсона. Напомним, что подынтегральные функции содержат базисные линейные сплайны $\varphi_i(x)$ и их производные $\varphi'_i(x)$. Ввиду простоты этих функций, имеет смысл воспользоваться их явным видом (17) и (18). Это позволит избежать многократного обращения к подпрограммам вычисления значений $\varphi_i(x)$ и $\varphi'_i(x)$. Кроме того, используя свойство аддитивности по промежутку интегрирования, можно упростить вычисление интегралов, отбрасывая заведомо нулевые слагаемые. Тогда интегралы, формально заданные на отрезке $[a, b]$, можно свести к интегралам, заданным на отрезках длины h или $2h$ (а именно, $[a, x_1]$, $[x_{N-1}, b]$ или $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N-1$). Указанная возможность была учтена при вычислении коэффициентов систем (36) и (44).

Таким образом, основной объем вычислений при реализации метода Галеркина приходится на вычисление интегралов для определения коэффициентов и правых частей СЛАУ, а также на ее численное решение.

Краткая сравнительная характеристика методов Галеркина и сеток.

Метод Галеркина	Метод сеток
1. Требуется нахождения коэффициентов СЛАУ.	1. Коэффициенты СЛАУ определяются по явным формулам.
2. Приводит к решению СЛАУ с трехдиагональной матрицей.	2. Приводит к решению СЛАУ с трехдиагональной матрицей.
3. Приближенное решение задается аналитической формулой на всем промежутке $[a, b]$.	3. Приближенное решение задается набором значений в узлах сетки.

Итак, из п. 1 следует, что метод сеток, вообще говоря, работает быстрее метода Галеркина, поскольку не требует вычисления коэффициентов СЛАУ. Из п. 3 можно заключить, что метод Галеркина предпочтительнее в том случае, если требуется получить значения приближенного решения в произвольных точках отрезка.

§3. Задания для лабораторной работы

Тема лабораторной работы:

“Метод Галеркина решения линейной граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка”.

Постановка задачи: найти решение линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + q_1(x)y(x) = f_1(x), \quad a < x < b,$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} -y'(a) + \mu_0 y(a) &= m_0, \\ y'(b) + \mu_1 y(b) &= m_1 \end{aligned}$$

с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Взять стартовое значение $N = 5$. При оценке погрешности использовать двойной пересчет.

Вывести на печать результаты для точек $x_i = a + i(b - a)/20$, $i = 0, \dots, 20$ в виде таблицы значений:

i	x_i	$y_N(x_i)$	$y_{2N}(x_i)$	$ y_{2N}(x_i) - y_N(x_i) $
0				
1				
...
20				

Указать число шагов процесса Галеркина при заданном $\varepsilon = 10^{-4}$.

Варианты заданий даны в конце пособия на страницах 32 – 35.

Рекомендации по выполнению лабораторной работы.

Можно воспользоваться следующим порядком выполнения лабораторной работы.

I. Создание подпрограммы для определения функций, которые в дальнейшем используются для нахождения коэффициентов СЛАУ, а именно: $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi_i(x)$, $\varphi'_i(x)$.

Замечание 1. Следует заметить, что $\varphi'_i(x)$ имеют простой вид (18). Поэтому можно и не организовывать подпрограммы для его вычисления, а просто воспользоваться в дальнейшем его явным представлением.

Замечание 2. При вычислении функции $\varphi_i(x)$ можно использовать как представление $\varphi_i(x)$ через базисную функцию $\varphi(x)$ по формулам (15), (16), так и воспользоваться видом (17).

II. Нахождение коэффициентов СЛАУ.

1. Прежде всего, необходимо зарезервировать массивы под коэффициенты СЛАУ:

$$A[k], \quad k=1, \dots, N,$$

$$B[k], \quad k=0, \dots, N,$$

$$C[k], \quad k=0, \dots, N-1,$$

$$D[k], \quad k=0, \dots, N,$$

которые задаются формулами (30), а также

$$\alpha[k], \beta[k], \quad k=0, \dots, N-1,$$

$$\xi[k], \quad k=0, \dots, N.$$

2. Для вычисления интегралов, определенных формулами (27), (28), удобно составить подпрограммы вычисления подынтегральных выражений.

3. Составить подпрограмму численного интегрирования (по одному из следующих методов численного интегрирования: прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса). При этом рекомендуется проводить вычисления с точностью ε_1 , которая на порядок выше точности ε , заданной в условии (например, $\varepsilon_1 = \varepsilon/10$).

Замечание. Разрывность функций $\varphi'_i(x)$ в точках x_{i-1} , x_i и x_{i+1} не влияет на возможность применения указанных методов интегрирования.

4. Вычислить значения элементов массивов $A[k]$, $B[k]$, $C[k]$, $D[k]$ по формулам (30). При этом следует воспользоваться тем, что $A[k+1] = C[k]$ при $k = 0, \dots, N-1$. При обращении к подпрограмме численного интегриро-

вания имеет смысл учесть, что элементы массивов $V[k]$ и $C[k]$ находятся по похожим формулам.

Замечание. В подпрограмме численного интегрирования следует предусмотреть возможность нахождения интеграла не на всем отрезке $[a, b]$, а на промежутках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$, или $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N - 1$.

III. Решение СЛАУ.

Удобно использовать метод прогонки. Для этого в результате прямого хода сформировать массивы $\alpha[i]$, $\beta[i]$, $i = 0, \dots, N-1$, по формулам (34). Далее, в результате обратного хода по формулам (35) найти неизвестные $\xi[i]$, $i = N, \dots, 0$.

IV. Формирование приближенного решения.

Приближенное решение определяется по формуле (14). Можно составить отдельную подпрограмму для вычисления этого решения. Ее можно, например, использовать при построении графика.

Замечание. Если требуется получить значение приближенного решения только в узлах x_0, \dots, x_N , то такая подпрограмма не понадобится в силу того, что $y_N(x_i) = \xi_i$, где ξ_i – решение СЛАУ (31) методом прогонки.

V. Оценивание погрешности и критерий завершения процесса вычислений.

1. Оценку погрешности следует проводить по принципу Рунге (используя двойной пересчет). Предположим, при заданном начальном N был получен набор ξ_i , $i = 0, \dots, N$. Далее, удваиваем N и, выполняя те же действия, получаем набор $\tilde{\xi}_i$, $i = 0, \dots, 2N$. Для оценки погрешности можно использовать следующую величину:

$$\max_{i=0, \dots, N} |\xi_i - \tilde{\xi}_{2i}| \quad (45)$$

2. Если значение величины погрешности, определяемой по формуле (45), окажется больше заданного ε , то следует удвоить N и продолжить вычисления. В противном случае процесс завершить.

Замечание. На каждом шаге метода Галеркина имеет смысл запоминать в некотором рабочем массиве набор значений ξ_i , $i = 0, \dots, N$ и использовать их на следующем шаге цикла при удвоенном N для вычисления погрешности.

Список литературы

- [1] Сохин А.С., Скорик В.А. Численное решение граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Харьков, 2004. – 28 с.
- [2] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
- [3] Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.
- [4] Турчак Л. И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2002. – 304 с.
- [5] Методи обчислень : Практикум на ЕОМ : навч. посібник / В.Л. Бурківська, С.О. Войцехівський, І.П. Гаврилюк та ін. - К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

Варианты

№	a	b	$p_1(x)$	$q_1(x)$	$f_1(x)$
1	0	1	$-2x$	-2	$-4x$
2	0	1	0	$-3/(x+1.2)^2$	$-1.5/\sqrt{x+1.2}$
3	0	1	$x+1$	-2	2
4	0.5	1	$1/x$	-2	$-2x^2$
5	0	1	$-(x+0.3)^2$	$-2/(x+0.3)^2$	0.3
6	0	1.5	$\sin x$	$-\cos x$	$10e^{-x}$
7	0	2	$e^{-x}(1+x^2)$	$-e^{-x}/(1+x^2)$	$15(x^2+1)$
8	0	1	0	$-3/(x+3)^2$	$-1.5/\sqrt{x+3}$
9	0	1	$0.5/(x+1.4)$	0	$1/\sqrt{x+1.4}$
10	0.5	1	$1/x$	0	0
11	0	1	$3/(2x+0.8)$	$-(x+0.4)$	$-2\sqrt{x+0.4}+0.4x+0.16$
12	1	3	$-\sin^2 x$	$0.1 \cos^2 x$	$1/(1+\sin^2 x)$
13	0.5	1	$-x^2$	$-2/x^2$	1
14	0	2	$\cos x$	$-\sin x$	$7e^x$
15	0	1.5	$-(1+x^2)$	$-(1+x^2)$	$15(\sin^2 x+1)$
16	1	3	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x - x \sin x$
17	0	1	$1/(2(x+1))$	-1	$-\sqrt{x+1}$
18	0.1	1.1	$-2x$	-2	$-4x$
19	0	1	-1	-1	$0.408 \sin 0.2x - \cos 0.2x$

заданий

№	Граничное условие при $x = a$	Граничное условие при $x = b$
1	$y - y' = 0$	$2y - y' = 1$
2	$3y - 1.2y' = 1.2\sqrt{1.2}$	$y' = \sqrt{1 + 1.2}$
3	$y - y' = -1$	$y = 4$
4	$y' = 1$	$y + y' = 5$
5	$y - y' = 1.3/0.3$	$y = 0.3/1.3$
6	$y' = 0$	$y = 3$
7	$y' - y = 0$	$y = 0$
8	$3y - 3y' = 3\sqrt{3}$	$y' = 2$
9	$3y - 2.8y' = 1.4$	$y' = \sqrt{2.4}$
10	$y' = 2$	$y + y' = 1$
11	$y - 0.4y' = 3/\sqrt{0.4} - 0.4$	$y' = -1/(1.4\sqrt{1.4})$
12	$y = 0$	$y' + y = 0.5$
13	$y - y' = 6$	$y = 1$
14	$y = 0$	$y' = 1$
15	$y' - y = 0$	$y' + y = 0$
16	$y' = 1$	$y' + y = 1$
17	$y' = 1/2$	$y = \sqrt{2}$
18	$y - y' = 0$	$y = 1 + e$
19	$y' = -0.04$	$0.2y + 2y' =$ $= 0.192 \cos 0.2 - 0.44 \sin 0.2$

Варианты

№	a	b	$p_1(x)$	$q_1(x)$	$f_1(x)$
20	0	0.5	$2x$	-1	$2(x^2 + 1) \sin x$
21	0.5	1	1	$-3/x$	$6x + 1$
22	0.5	1	$2/x$	$-x$	-1
23	0	0.5	-1	-2	$-2e^x$
24	0	1	$x + 1$	-2	2
25	0	1	$-2x$	-2	$-4x$
26	0	1	$-2x$	2	$0.5(5x^3 - 3x^2 - 0.5x + 1)$
27	0	1	-1	-2	$-3e^{-x}$
28	$-\pi$	π	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
29	0	1	$-2x$	2	x
30	0	1	$-(x^2 + 1)$	$-2x$	$2(3x^2 - 1)/(x^2 + 1)^3$
31	0	1	$-2x$	2	$3x^2 + x - 1$
32	$-\pi$	π	$-\cos x$	$\sin x$	$\sin x$
33	0.5	1	2	-1	$-2xe^{-x}$
34	0	1	$-2x$	2	$5x^3 - 2x$
35	0	1	$1/(2(x + 2))$	-1	$-\sqrt{x + 2}$

заданий

№	Граничное условие при $x = a$	Граничное условие при $x = b$
20	$y = 0$	$y = -0.5 \cos 0.5$
21	$y = -0.125$	$y' + y = 3$
22	$y' = -4$	$y = 1$
23	$y' = 0$	$y' + y = 3.29744$
24	$y - y' = -1$	$y = 4$
25	$y = 1$	$y = 1 + e$
26	$y = 0$	$y' = 1$
27	$y' = 0$	$y + 2y' = 0$
28	$y = 2$	$y = 2$
29	$y = 0$	$y' = 1$
30	$y - 2y' = 1$	$y = 0.5$
31	$y = 0$	$y' = 1$
32	$y = 2$	$y = 2$
33	$y - y' = 0$	$y' = 0$
34	$y = 0$	$y' = 1$
35	$y' = 1/(2\sqrt{2})$	$y = \sqrt{3}$

Навчальне видання

Ігнатович Світлана Юріївна,
Райхцаум Раїса Борисівна

**“Метод Гальоркіна розв’язання лінійних
граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь
другого порядку”**

Макет обкладинки І.М.Дончик

61077, Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, організаційно-видавничий відділ НМЦ.

Підписано до друку 25.09.06 Формат 60 × 84/16.

Папір офсетний. Друк ризографічний.

Обл.-вид. арк. 2,0. Умов.-друк. арк. 1,86.

Наклад 100 прим. Ціна договірна.

Надруковано ФОП “Петрова І.В.”

61144, Харків-144, вул. Гв. Широнінців 79^В, к.137

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011 від 03.01.03