Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Методические указания по курсу «Функциональный анализ»

Харьков - 2002

УДК 517.982.22

Методические указания по курсу "Функциональный анализ"для студентов 4 курса механико-математического факультета (специальность прикладная математика). – Харьков, 2002. – 17 с.

Составитель С. Ю. Игнатович.

Цель настоящего пособия – помочь студентам в подготовке по вопросам, предложенным для самостоятельного изучения по теме "гильбертовы пространства".

Рекомендовано к печати кафедрой дифференциальных уравнений и управления Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.
Протокол № 6 от 11.02.2002.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук Резуненко А.В.

§ 1. Базисы Гамеля в линейных пространствах

В этом параграфе X – *линейное* пространство над $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. *Элементы множества $M \subset X$ называются линейно независимыми, если ни один из элементов этого множества не представляется в виде конечной линейной комбинации остальных элементов этого же множества.*

Определение 1.2. *Линейной оболочкой множества $M \subset X$ называется множество всех конечных линейных комбинаций элементов из M,*

$$\operatorname{Lin} M = \{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k : \; n \in \mathbb{N}, \; a_k \in \mathbb{C}, \; x_k \in M\}.$$

Определение 1.3. *Базисом Га́меля линейного пространства называется такое множество линейно независимых элементов, линейная оболочка которого совпадает со всем пространством.*

Пример: n-мерное пространство имеет, очевидно, базис Гамеля, состоящий из n элементов.

Теорема 1.1. (о базисах Гамеля) *Пусть X – линейное пространство,* $\dim X > 0$. *Тогда*

a) в X существует базис Гамеля;

b) каждый элемент пространства X однозначно представляется в виде конечной линейной комбинации элементов базиса Гамеля;

c) два различных базиса Гамеля имеют одинаковую мощность;

d) базисы Гамеля двух линейных пространств X_1 и X_2 имеют одинаковую мощность тогда и только тогда, когда эти пространства изоморфны, т.е. существует взаимно-однозначное отображение $\phi : X_1 \to X_2$, сохраняющее операции сложения и умножения на число, $\phi(ax + by) = a\phi(x) + b\phi(y)$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$, $x, y \in X_1$.

Определение 1.4. *Размерностью линейного пространства называют мощность базиса Гамеля.*

Доказательство теоремы 1.1. Мы рассмотрим только случай $\dim X = \infty$.

а) Существование базиса Гамеля докажем с помощью леммы Цорна. Пусть в пространстве X есть хотя бы один ненулевой элемент (иначе, т.е. для нуль-мерного пространства, базис Гамеля пуст). Рассмотрим множество $M = \{S_\alpha, \alpha \in A\}$ всех подмножеств $S_\alpha \subset X$, состоящих из линейно независимых элементов (здесь и далее $\alpha \in A$ означает, что α пробегает некоторое множество индексов A). Очевидно, множество M не пусто; например, оно содержит все одноэлементные множества $\{x\}$, если $x \neq 0$.

Введем в M частичный порядок, положив $S_{\alpha_1} \geq S_{\alpha_2}$, если $S_{\alpha_1} \supset S_{\alpha_2}$. Тогда, очевидно, каждая цепь (линейно упорядоченное подмножество M) имеет верхнюю грань: для цепи

$\{S_\alpha,\ \alpha \in A_1\}$ верхней гранью является объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A_1} S_\alpha$. Следовательно, по лемме Цорна в множестве M найдется максимальный элемент. Обозначим его S.

Докажем, что S как раз и является базисом Гамеля. Линейная независимость элементов S следует из определения. Пусть, однако, $\operatorname{Lin} S \neq X$. Тогда найдется элемент x, линейно независимый от элементов S. Рассмотрим множество $\tilde{S} = S \cup \{x\}$. Очевидно, $\tilde{S} \geq S$, что противоречит максимальности S. Следовательно, $\operatorname{Lin} S = X$, т.е. S – базис Гамеля.

b) Следует из определения.

c) Пусть $S = \{x_\alpha, \alpha \in A\}$ и $T = \{y_\beta, \beta \in B\}$ – два базиса Гамеля в пространстве X. Чтобы доказать их равномощность, покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие множества S и некоторого подмножества $T' \subset T$, и наоборот, взаимно-однозначное соответствие множества T и некоторого подмножества $S' \subset S$.

Снова воспользуемся леммой Цорна. Рассмотрим множество Φ всех *взаимно-однозначных* отображений *части* базиса S на *часть* базиса T, т.е. $\phi_\alpha : S_\alpha \to T_\alpha$, $S_\alpha \subset S$, $T_\alpha \subset T$, таких что множества $(S \backslash S_\alpha) \cup T_\alpha$ *линейно независимы*. В множестве Φ введем частичный порядок, считая $\phi_{\alpha_1} \geq \phi_{\alpha_2}$, если ϕ_{α_1} – продолжение ϕ_{α_2}, т.е. $S_{\alpha_1} \supset S_{\alpha_2}$ и $\phi_{\alpha_1} = \phi_{\alpha_2}$ на S_{α_2}.

Тогда в каждой цепи множества Φ найдется верхняя грань. В самом деле, для цепи $\{\phi_\beta, \beta \in \widetilde{B}\}$ верхняя грань – это отображение, определенное на множестве $\widetilde{S} = \bigcup\limits_{\beta \in \widetilde{B}} S_\beta$ формулой $\widetilde{\phi}(x) = \phi_\beta(x)$ для $x \in S_\beta$. Следовательно, по лемме Цорна множество Φ имеет максимальный элемент. Обозначим его ϕ. Покажем, что отображение ϕ определено на всем базисе S. Пусть это не так, т.е. $\phi : \widetilde{S} \to \widetilde{T}$, и $\widetilde{S} \neq S$. Значит, найдется элемент $x \in S$, который не принадлежит $\widetilde{S}$. По определению отображения ϕ элемент x является линейно независимым от элементов $\widetilde{T}$. Но поскольку T – базис Гамеля, то x представляется в виде линейной комбинации элементов T, т.е. линейно зависим от T. Следовательно, $\widetilde{T} \neq T$. Значит, найдется элемент $y \in T$, не принадлежащий $\widetilde{T}$.

Возможны два случая:

1) элемент y не зависит от элементов $(S \backslash \widetilde{S}) \cup \widetilde{T}$. Тогда элементы множества

$$S \backslash (\widetilde{S} \cup \{x\}) \cup \widetilde{T} \cup \{y\}$$

линейно независимы. Построим новое отображение $\phi' : \widetilde{S} \cup \{x\} \to \widetilde{T} \cup \{y\}$ по формуле $\phi'(z) = \phi(z)$ при $z \in \widetilde{S}$ и $\phi'(x) = y$. Очевидно, ϕ' – продолжение ϕ, т.е. $\phi' \geq \phi$, что противоречит максимальности ϕ;

2) элемент y зависит от элементов $(S \backslash \widetilde{S}) \cup \widetilde{T}$. Тогда он единственным образом представляется в виде конечной линейной комбинации

$$y = \sum_{x_i \in S \backslash \widetilde{S}} a_i x_i + \sum_{y_j \in \widetilde{T}} b_j y_j,$$

причем хотя бы один коэффициент a_i не равен нулю. Пусть это a_{i_0}. Тогда элементы множества $\Big(S \backslash (\widetilde{S} \cup \{x_{i_0}\})\Big) \cup \widetilde{T} \cup \{y\}$ линейно независимы. Построим новое отображение $\phi' : \widetilde{S} \cup \{x_{i_0}\} \to \widetilde{T} \cup \{y\}$ по формуле $\phi'(z) = \phi(z)$ при $z \in \widetilde{S}$ и $\phi'(x_{i_0}) = y$. Очевидно, ϕ' – продолжение ϕ, т.е. $\phi' \geq \phi$, что противоречит максимальности ϕ.

Итак, ϕ отображает базис S на часть базиса $\widetilde{T} \subset T$ взаимно-однозначно.

Поменяем базисы местами; тогда аналогичные рассуждения приводят к взаимно-однозначному отображению базиса T на часть базиса $\widetilde{S} \subset S$. Следовательно, множества S и T равномощны. (это доказательство пункта с) можно найти в [3, с.10-11]).

d) Очевидно, изоморфизм пространств переводит базис Гамеля в базис Гамеля. С другой стороны, если S_1 – базис Гамеля в пространстве X_1, а S_2 – в пространстве X_2, причем базисы равномощны, то любое взаимно-однозначное отображение $\phi : S_1 \to S_2$ порождает изоморфизм пространств: элементу $x = \sum a_i x_i$, $x_i \in S_1$, ставится в соответствие элемент $y = \sum a_i y_i$, где $y_i = \phi(x_i) \in S_2$.

Теорема доказана.

Задача 1. *Доказать, что в бесконечномерном полном нормированном пространстве базис Гамеля не может быть счетным.* (Указание: воспользоваться теоремой Бэра.)

Задача 2. *Построить неограниченный линейный оператор, определенный на всем бесконечномерном нормированном пространстве.* (Указание: определить оператор вначале на базисе Гамеля, а затем продолжить на все пространство по линейности.)

§ 2. Полные ортонормированные системы элементов в гильбертовом пространстве

В этом параграфе H – гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, а $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в H. Напомним несколько определений фактов из функционального анализа.

Теорема 2.1. *Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset H$. Для того, чтобы линейная оболочка $\operatorname{Lin} M$ была плотна в H (т.е. $\overline{\operatorname{Lin} M} = H$), необходимо и достаточно, чтобы не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам множества M.*

Определение 2.1. *Пусть H – гильбертово пространство. Множество $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ называется ортонормированной системой элементов, если*

$$(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ 1 & \text{при} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

Определение 2.2. *Система элементов называется полной, если в пространстве не существует ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы.*

Теорема 2.2. *В гильбертовом пространстве существует полная ортонормированная система элементов. Мощности всех полных ортонормированных систем элементов гильбертова пространства совпадают.*

Доказательство этой теоремы также опирается на лемму Цорна и может быть проведено аналогично доказательству теоремы 1.1.

Определение 2.3. *Размерностью гильбертова пространства называют мощность полной ортонормированной системы элементов.*

Теорема 2.3. *Гильбертово пространство счетномерно в смысле определения 2.3 тогда и только тогда, когда оно сепарабельно. В этом и только этом случае оно изоморфно пространству ℓ_2.*

Теорема 2.4. (неравенство Бесселя) *Если $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ – ортонормированная система элементов, то для каждого $x \in H$ не более чем счетное количество чисел (x, e_α) отлично от нуля, и имеет место неравенство Бесселя:*

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Определение 2.4. *Система линейно независимых элементов $S = \{x_\alpha, \alpha \in A\}$ называется базисом гильбертова пространства H, если любой элемент этого пространства единственным образом представляется в виде*

$$x = \sum_{\alpha \in A} b_\alpha x_\alpha,$$

где $b_\alpha \in \mathbb{C}$ и не более чем счетное количество коэффициентов b_α отличны от нуля, а ряд в правой части равенства сходится по норме пространства H.

Теорема 2.5. *Пусть $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ – ортонормированная система элементов гильбертова пространства H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) система $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ полна;

(b) для любого элемента $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля (называемое также уравнением замкнутости):

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2.$$

(c) система $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ является базисом пространства H, причем для каждого элемента $x \in H$ имеет место представление

$$x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha.$$

Задача 3. *Пусть $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ – система элементов в H. Доказать, что если для любого элемента $x \in H$ имеет место уравнение замкнутости, то для любых $x, y \in H$ имеет место обобщенное уравнение замкнутости*

$$(x, y) = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)(e_\alpha, y).$$

(Указание: рассмотреть уравнение замкнутости для элемента $x + \lambda y$ при произвольном λ.)

Задача 4. *Показать, что в гильбертовом пространстве существуют ненулевые линейные операторы, равные нулю на всех элементах ортонормированного базиса* (Указание: дополнить ортонормированный базис до базиса Гамеля.)

Из теорем 2.5 и 2.1 вытекает, что линейная оболочка *ортонормированной* системы плотна в гильбертовом пространстве тогда и только тогда, когда система является базисом. Но это, вообще говоря, неверно для *произвольных* линейно независимых систем элементов. Пусть, например, пространство H сепарабельно и линейная оболочка некоторой последовательности элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ плотна в нем. Это означает, что для любого $x \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} a_k(\varepsilon)x_k$, такой, что $\|x - x(\varepsilon)\| < \varepsilon$. Если система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована, то можно положить $a_k(\varepsilon) = (x, x_k)$. В этом случае коэффициенты $a_k(\varepsilon)$ не зависят от ε. Т.к. $x(\varepsilon) \to x$ при $\varepsilon \to 0$, то x представляется в виде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Если же система не ортонормирована и коэффициенты $a_k(\varepsilon)$ зависят от ε, то $a_k(\varepsilon)$ могут не иметь предела при $\varepsilon \to 0$, так что в этом случае x может не представляться в виде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$.

Пример. Рассмотрим пространство $L_2[0,1]$. Как известно, система функций $x_k(t) = t^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, линейно независима и ее линейная оболочка плотна в этом пространстве. Покажем, что она не является базисом.

Пусть это неверно, тогда каждый элемент $x \in L_2[0,1]$ можно представить в виде ряда $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{k-1}$, т.е. $\|x(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^{k-1}\|_{L_2[0,1]} \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого $s \in [0,1]$ рассмотрим характеристическую функцию отрезка $[0,s]$,

$$y_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [0,s] \\ 0 & \text{при} \quad t \in (s,1] \end{cases}$$

Тогда $(x, y_s) = (\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{k-1}, y_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (t^{k-1}, y_s)$ в силу непрерывности скалярного произведения. Подсчитаем скалярные произведения:

$$(x, y_s) = \int_0^s x(t)dt, \qquad (t^{k-1}, y_s) = \int_0^s t^{k-1}dt = s^k/k, \; s \in [0,1].$$

Таким образом, $\int_0^s x(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s^k/k$ для всех $s \in [0,1]$, причем ряд в правой части сходится. Поэтому функция $f(s) = \int_0^s x(t)dt$ аналитическая при $s \in [0,1]$ и, следовательно, ее производная также аналитическая. С другой стороны, производная $f(s)$, очевидно, почти всюду совпадает с $x(s)$. Следовательно, каждая функция из пространства $L_2[0,1]$ является (почти всюду) аналитической, что неверно.

Ортогонализация системы $\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ приводит к последовательности *ортогональных полиномов Лежандра.* Далее будем рассматривать функции на отрезке $[-1,1]$.

Определение 2.5. *Последовательность полиномов $P_k(t)$, $k \geq 0$, называется последовательностью ортогональных полиномов Лежандра на отрезке $[-1,1]$, если*

a) $P_k(t)$ имеет степень точно k,

b) $P_k(t)$ имеет положительный старший коэффициент,

c) полиномы $P_k(t)$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2[-1,1]$.

Из определения следует, что расстояние от произвольного элемента $x(t) \in L_2[-1,1]$ до конечномерного подпространства, натянутого на полиномы степени не выше n, достигается на элементе $\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{n} (x, P_k) P_k(t)$.

Задача 5. *Получить несколько первых полиномов Лежандра на интервале* $(-1,1)$ *методом ортогонализации Грама-Шмидта.*

Задача 6. *Доказать, что для последовательности ортогональных полиномов Лежандра справедлива следующая трехчленная формула:*

$$\mu_n P_{n+1}(t) + \mu_{n-1} P_{n-1}(t) = t P_n(t), \qquad n \geq 0, \tag{2.1}$$

где принято $\mu_{-1} = 0$*, причем* $\mu_n = (tP_n, P_{n+1}) > 0$ *при* $n \geq 0$.

План доказательства:

(a) Для $n = 0$ равенство (2.1) очевидно; μ_0 можно найти, умножая обе части этого равенства скалярно на P_1.

(b) Пусть равенство (2.1) доказано для $n = k - 1$. Заметим, что отсюда следует, что $P_k(t)$ – либо четная, либо нечетная функция, следовательно, функция $(P_k(t))^2$ четна.

(c) Рассмотреть полином $\widetilde{P}_{k+1}(t) = tP_k(t) - \sum_{j=0}^{k} a_j P_j(t)$ степени $k+1$. Показать, что ортогональность $\widetilde{P}_{k+1}$ всем полиномам $P_0, \ldots, P_k$ эквивалентна условиям $a_0 = \cdots = a_{k-2} = 0$, $a_{k-1} = (tP_k, P_{k-1})$, $a_k = (tP_k, P_k)$.

(d) Получить, что $a_k = 0$, воспользовавшись симметричностью отрезка $(-1,1)$ и четностью функции $(P_k(t))^2$.

(e) Из доказанного следует, что полином $\widetilde{P}_{k+1}(t) = tP_k(t) - \mu_{k-1}P_{k-1}(t)$, где $\mu_{k-1} = a_{k-1} = (tP_k, P_{k-1})$, с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом Лежандра $P_{k+1}(t)$, т.е. $\widetilde{P}_{k+1}(t) = cP_{k+1}(t)$. Найти c, умножая $\widetilde{P}_{k+1}$ скалярно на P_{k+1}.

(f) Наконец, показать, что из положительности старших коэффициентов полиномов Лежандра следует $\mu_{k-1} > 0$.

Из формулы (2.1), в частности, следует, что полином Лежандра имеет ненулевые коэффициенты либо только при четных, либо только при нечетных степенях.

Задача 7. *Доказать, что полином Лежандра степени* n *имеет ровно* n *простых действительных корней, лежащих на интервале* $(-1,1)$. (Указание: предположив, что P_n имеет $m < n$ (различных) точек перемены знака на $(-1,1)$, рассмотреть полином степени m, имеющий эти корни, и воспользоваться ортогональностью.)

Задача 8. *Доказать следующие свойства корней полиномов Лежандра:*

a) $P_k(t)$ *и* $P_{k+1}(t)$ *не имеют общих корней;*

b) в корнях полинома $P_k(t)$ *полиномы* $P_{k-1}(t)$ *и* $P_{k+1}(t)$ *имеют разные знаки;*

c) корни полиномов $P_k(t)$ *и* $P_{k+1}(t)$ *перемежаются, т. е. если* $t_1 < \cdots < t_k$ *– корни* $P_k(t)$*, а* $s_1 < \cdots < s_{k+1}$ *– корни* $P_{k+1}(t)$*, то*

$$-1 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 \cdots < s_k < t_k < s_{k+1} < 1.$$

(Указание: воспользоваться трехчленной формулой; последний пункт доказывать по индукции.)

Задача 9. *Доказать, что P_n удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:* $(t^2-1)P_n''(t)+2tP_n'(t)-n(n+1)P_n(t)=0$. (Указание: проинтегрировав по частям $\int_{-1}^{1}((t^2-1)P_n'(t))'t^k dt$, $k\le n$, получить равенство $(t^2-1)P_n''(t)+2tP_n'(t)+\mu P_n(t)=0$, а затем найти μ, рассмотрев старший коэффициент.)

Задача 10. *Получить рекуррентную формулу для коэффициентов полиномов Лежандра: если $P_n(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$, то*

$$a_{k+2}=-a_k\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)},\qquad k\ge 0.$$

(Указание: воспользоваться дифференциальным уравнением для полиномов Лежандра и рассмотреть коэффициенты полинома, стоящего в левой части уравнения.)

Задача 11. *Доказать, что полиномы Лежандра могут быть получены по формуле Родрига $P_n(t)=c_n\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$, где $c_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{1}{n!\,2^n}$.*

План доказательства:

(a) доказать, что полином $\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$ степени n ортогонален всем полиномам степени меньше n, проинтегрировав по частям k раз интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)t^k dt$, $k\le n-1$, и пользуясь симметричностью отрезка $(-1,1)$. Это означает, что $P_n(t)=c_n\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$;

(b) для нахождения константы c_n заметить, что старший коэффициент $P_n(t)$ равен $c_n\frac{(2n)!}{n!}$, и рассмотреть равенство

$$1=(P_n,P_n)=(P_n,c_n\frac{(2n)!}{n!}t^n)=c_n^2\frac{(2n)!}{n!}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)t^n dt.$$

Задача 12. *Получить явную формулу для коэффициентов полиномов Лежандра:*

$$P_{2m}(t)=\sqrt{\tfrac{4m+1}{2}}\tfrac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\tfrac{(-1)^k}{k!(2m-k)!}\tfrac{(4m-2k)!}{(2m-2k)!}\;t^{2m-2k},\quad 2m\le n,$$

$$P_{2m+1}(t)=\sqrt{\tfrac{4m+3}{2}}\tfrac{1}{2^{2m+1}}\sum_{k=0}^{m}\tfrac{(-1)^k}{k!(2m+1-k)!}\tfrac{(4m+2-2k)!}{(2m+1-2k)!}\;t^{2m+1-2k},\quad 2m+1\le n.$$

(Указание: дифференцировать тождество $(t^2-1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}t^{2n-2k}$.)

Задача 13. *Какой вид имеет трехчленная формула для полиномов Лежандра в пространстве $L_2[0,1]$?*

Подробнее о свойствах ортогональных полиномов Лежандра и о других классах ортогональных полиномов см. в [6].

§ 3. Базисы Рисса

В этом параграфе будем считать, что гильбертово пространство H сепарабельно. В силу теоремы 2.3 оно обладает счетными базисами. Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях произвольная (*не обязательно ортонормированная*) последовательность линейно независимых элементов является базисом.

Определение 3.1. *Последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ называются биортогонально сопряженными, если*

$$(x_k, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq j \\ 1 & \text{при} \quad k = j \end{cases}$$

Задача 14. *Пусть последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ биортогонально сопряженные. Доказать, что каждая из них линейно независима.*

Задача 15. *Пусть две полные последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ биортогонально сопряженные. Доказать, что если ряды $\sum_{j=1}^{\infty}(x, x_j)y_j$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(x, y_k)x_k$ сходятся, то они сходятся к элементу x.* (Указание: обозначив $\tilde{x}$ сумму ряда, показать, что разность $x - \tilde{x}$ ортогональна всем элементам полной последовательности.)

Легко показать, что любая *конечная* линейно независимая система элементов имеет биортогонально сопряженную. Для бесконечных систем этот вопрос решается следующей теоремой.

Теорема 3.1. (о биортогональных системах) *Для того, чтобы система элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ имела биортогонально сопряженную, необходимо и достаточно, чтобы никакой элемент этой системы не содержался в замыкании линейной оболочки остальных элементов, т.е. $x_k \notin \overline{\mathrm{Lin}(x_j, j \neq k)}$, $k \geq 1$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Обозначим $M = \overline{\mathrm{Lin}(x_j, j \geq 1)}$, $M_k = \overline{\mathrm{Lin}(x_j, j \neq k)}$, $k \geq 1$. Тогда M_k – замкнутые линейные подпространства, содержащиеся в замкнутом подпространстве M, но не совпадающие с ним. Рассмотрим ненулевые элементы $z_k \in M \backslash M_k$. Ортогональные проекции этих элементов на множества M_k обозначим $\tilde{z}_k$. Тогда $\tilde{y}_k = z_k - \tilde{z}_k$ ортогональны всем элементам x_j исходной системы, кроме x_k. Выбирая окончательно $y_k = \frac{1}{(\tilde{y}_k, x_k)}\tilde{y}_k$, $k \geq 1$, получаем, что последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ – биортогонально сопряженная к исходной.

Пример. Покажем, что в $L_2[0,1]$ последовательность $\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет биортогонально сопряженной. Действительно, пусть $\{y_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ – биортогонально сопряженная к $\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $(y_j, t^{j-1}) = \int_0^1 y_j(t)t^{j-1}dt = 1$ и $(y_j, t^{k-1}) = \int_0^1 y_j(t)t^{k-1}dt = 0$ при $k \neq j$, откуда получаем, в частности, что $\int_0^1 (y_j(t)t^{j+1})t^{m-1}dt = 0$ при $m \geq 1$. Поскольку система $\{t^{m-1}\}_{m=1}^{\infty}$ полна в пространстве $L_2[0,1]$, то $y_j(t)t^{j+1} = 0$ почти всюду на $(0,1)$. Следовательно, $y_j(t) = 0$ почти всюду на $(0,1)$, что противоречит условию $(y_j, t^{j-1}) = 1$.

Задача 16. *Найти расстояние от элемента t^k до замыкания линейной оболочки, натянутой на элементы $t^{k+1}, t^{k+2}, \ldots,$ в пространстве $L_2[0,1]$.*

План решения. Например, можно рассуждать так:

(a) рассмотреть $z(t)$ – ортогональную проекцию t^k на подпространство

$$M = \overline{\mathrm{Lin}\{t^{k+j}, j \geq 1\}};$$

(b) показать, что тогда функция $(z(t)-t^k)t^{k+1}$ ортогональна всем функциям t^{j-1}, $j \geq 1$;

(c) получить отсюда, что $z(t)$ (почти всюду) совпадает с t^k, откуда следует, что $t^k \in M$.

Определение 3.2. *Пусть последовательность элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом пространства H, т.е. каждый элемент $x \in H$ допускает единственное разложение*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k, \tag{3.1}$$

где ряд в правой части равенства сходится по норме пространства H. Этот базис называется базисом Рисса [1], если существуют такие числа $M \geq m > 0$, что для каждого $x \in H$ имеет место оценка

$$m \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2 \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2. \tag{3.2}$$

В силу неравенств (3.2) ряд (3.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$. Таким образом, базис Рисса порождает взаимно-однозначное соответствие (но, вообще говоря, не изоморфизм) между гильбертовым пространством H и пространством ℓ_2, соотнося элементу $x \in H$ последовательность его коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, сами элементы базиса Рисса отвечают элементам ортонормированного ("единичного") базиса ℓ_2.

Один из способов построить базис Рисса – "немного" изменить какую-либо ортонормированную систему элементов. Такой путь дает

Теорема 3.2. (Винера-Пэли) *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная последовательность, а некоторая последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ "мало отличается" от нее в том смысле, что существует число $\theta \in (0,1)$, такое что для любого конечного набора чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, $n \geq 1$, выполнено неравенство*

$$\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k - x_k) \|^2 \leq \theta^2 \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2. \tag{3.3}$$

Тогда

a) последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ является базисом пространства H;

[1] Здесь мы следуем [1, стр.56]

b) последовательность $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ имеет биортогонально сопряженную последовательность $\{y_k\}_{k=1}^\infty$, которая тоже является базисом;

c) для каждого элемента $x \in H$ имеет место представление $x = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k x_k = \sum_{j=1}^\infty \beta_j y_j$, где $\alpha_k = (x, y_k)$, $\beta_j = (x, x_j)$, причем справедливы оценки

$$(1-\theta)^2 \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^2 \le \|x\|^2 \le (1+\theta)^2 \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^2,$$

$$\frac{1}{(1+\theta)^2} \sum_{k=1}^\infty |\beta_k|^2 \le \|x\|^2 \le \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{k=1}^\infty |\beta_k|^2,$$

т.е. $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ – базисы Рисса.

Доказательство ([5, стр. 225]). Из (3.3) вытекает, что для любого элемента $x \in H$ ряд $\sum_{k=1}^\infty (x, e_k)(e_k - x_k)$ сходится. Введем оператор $A : H \to H$, действующий по правилу

$$Ax = \sum_{k=1}^\infty (x, e_k)(e_k - x_k).$$

Очевидно, A линейный. Далее, из (3.3) получаем

$$\|Ax\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^n (x, e_k)(e_k - x_k)\|^2 \le \theta^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \theta^2 \|x\|^2,$$

т.е. оператор A ограничен и его норма не превосходит θ. По условию $\theta < 1$, следовательно, существует и ограничен оператор $B = (I - A)^{-1}$, причем $Bx_k = e_k$.

Положим $y_k = B^* e_k$ и покажем, что последовательность y_k биортогональна последовательности x_k. Имеем $(x_k, y_j) = (x_k, B^* e_j) = (Bx_k, e_j) = (BB^{-1} e_k, e_j) = (e_k, e_j)$, что и требовалось. Далее, так как базис e_k ортонормированный, то для любого $x \in H$ имеем представления

$$x = B^{-1}Bx = B^{-1} \sum_{k=1}^\infty (Bx, e_k) e_k = \sum_{k=1}^\infty (x, B^* e_k) B^{-1} e_k = \sum_{k=1}^\infty (x, y_k) x_k,$$

и аналогично

$$x = B^*(B^*)^{-1}x = B^* \sum_{k=1}^\infty ((B^*)^{-1}x, e_k) e_k = \sum_{k=1}^\infty (x, B^{-1} e_k) B^* e_k = \sum_{k=1}^\infty (x, x_k) y_k,$$

что доказывает пункты a), b) теоремы.

Для доказательства пункта c) заметим, что

$$\sum_{k=1}^\infty |(x, y_k)|^2 = \sum_{k=1}^\infty |(x, B^* e_k)|^2 = \sum_{k=1}^\infty |(Bx, e_k)|^2 = \|Bx\|^2,$$

а так как $B = (I - A)^{-1}$, то $\frac{1}{1+\theta}\|x\| \le \|Bx\| \le \frac{1}{1-\theta}\|x\|$. Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, B^{-1}e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |((B^*)^{-1}x, e_k)|^2 = \|(B^*)^{-1}x\|^2,$$

а тогда $(1-\theta)\|x\| \le \|(B^*)^{-1}x\| = \|B^{-1}x\| \le (1+\theta)\|x\|$, что и завершает доказательство теоремы.

Пример ([5, стр. 226]). В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda_k t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Пусть последовательность чисел λ_k "мало отличается" от последовательности $\{1, 2, \ldots\}$, а именно, пусть

$$M = \max_k |\lambda_k - k| < \frac{\log 2}{\pi}.$$

Функции $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, образуют ортонормированный базис. Поскольку

$$e^{i\lambda_n t} - e^{int} = e^{int}(e^{i(\lambda_n - n)t} - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i(\lambda_n - n))^k}{k!} t^k e^{int},$$

то для любой последовательности α_n и любого натурального N имеем

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} |\alpha_n (e^{i\lambda_n t} - e^{int}) \right\| = \left\| \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n \tfrac{(i(\lambda_n - n))^k}{k!} t^k e^{int} \right\| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\pi^k}{k!} \left\| \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n (i(\lambda_n - n))^k e^{int} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\pi^k}{k!} \left(\sum_{n=-N}^{N} |\alpha_n|^2 |\lambda_n - n|^{2k} \right)^{1/2} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\pi^k}{k!} M^k \left(\sum_{n=-N}^{N} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \le (e^{M\pi} - 1) \left(\sum_{n=-N}^{N} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим $\theta = e^{M\pi} - 1$. Очевидно, условия теоремы 3.2 выполнены, следовательно, последовательность $x_k(t)$ является базисом Рисса пространства $L_2[-\pi, \pi]$.

§ 4. Пространство почти периодических функций

Приведем пример несепарабельного гильбертова пространства, т.е. пространтсва, в котором имеется несчетная ортонормированная система элементов. Для этого рассмотрим тригонометрические полиномы – линейную оболочку (над $\mathbb{C}$) функций вида $x_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, заданных на всей оси. На этой линейной оболочке введем скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \overline{y(t)} dt. \tag{4.1}$$

Задача 17. *Проверить, что для введенного скалярного произведения система функций $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ортонормирована.*

Определение 4.1. *Пополнение линейной оболочки множества функций* $x_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *по норме, определяемой скалярным произведением (4.1), называется пространством почти периодических функций Безиковича и обозначается* B_2.

Очевидно, полученное гильбертово пространство не сепарабельно, т.к. содержит несчетную ортогональную систему $e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

При этом из рассмотрений параграфа 2 следует, что для каждого элемента $x \in B_2$ найдется не более счетного числа чисел λ_k (так называемые *показатели Фурье* элемента x), для которых числа $(x, e^{i\lambda t})$ (так называемые *коэффициенты Фурье* элемента x) отличны от нуля, и имеет место представление $x = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} (x, e^{i\lambda t}) e^{i\lambda t}$.

Задача 18. *Доказать, что в пространстве* B_2 *справедлива теорема Рисса-Фишера в следующем варианте: для каждой последовательности* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ *и каждой последовательности* $\{a_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, *такой, что* $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 < \infty$, *найдется элемент* $x \in B_2$, *для которого* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *– последовательность его показателей Фурье, а* $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ *– последовательность его коэффициентов Фурье.* (Указание: рассмотреть замыкание линейной оболочки элементов $e^{i\lambda_k t}$, являющееся сепарабельным пространством.)

В частности, в пространстве B_2 существует элемент, показатели Фурье которого – все рациональные числа.

Название "пространство почти периодических функций" связано со следующим определением.

Определение 4.2. *Непрерывная функция* $x(t)$, *заданная на* $\mathbb{R}$, *называется почти периодической по Бору, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\ell = \ell(\varepsilon) > 0$, *что на любом отрезке числовой оси длины* ℓ *найдется хотя бы одна такая точка* τ *(так называемый* ε*-почти период), что* $|x(t+\tau) - x(t)| < \varepsilon$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, периодическая функция является почти периодической. Смысл обобщения понятия периодической функции состоит в следующем. Если T – период для некоторой периодической функции, то и числа nT при всех целых n тоже являются периодами. Т.е. периоды лежат "относительно плотно" на оси в том смысле, что на любом отрезке оси длины T найдется период. Для почти периодической функции тоже требуется, чтобы почти периоды лежали на оси относительно плотно.

Задача 19. *Доказать, что если функция почти периодическая в смысле определения 4.2, то она ограничена на всей оси.* (Указание: рассмотрев $\varepsilon = 1$, $\ell(1)$ и 1-почти период $\tau \in [-t_0, -t_0 + \ell(1)]$, оценить $|x(t_0)|$ с помощью величины $m = \max_{0 \le t \le \ell(1)} |x(t)|$.)

Задача 20. *Доказать, что если для почти периодической функции* $x(t)$ *величины* $\ell(\varepsilon)$ *ограничены в совокупности при* $\varepsilon \to 0$, *то* $x(t)$ *периодическая.* (Указание: пусть $\ell(\varepsilon) \le \ell_0 < \infty$; воспользоваться тем, что тогда ε-почти периоды для всех ε лежат на отрезке $(\ell_0, 2\ell_0)$)

Утверждение 4.1. *Функция* $x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi\sqrt{2}t)$ *является почти периодической в смысле определения 4.2.*

Доказательство.

(a) Выберем любое $\varepsilon > 0$. Пусть p – такое целое число, для которого найдется целое число q, удовлетворяющее неравенству $|p - \frac{1}{\sqrt{2}}q| < \delta$. Это неравенство можно переписать в виде $p = \frac{1}{\sqrt{2}}q + \delta\theta$, где $|\theta| < 1$. Поскольку $\sin 2\pi n = 0$ для целых n, то

$$x(t+p) - x(t) = \sin 2\pi\sqrt{2}(t + \delta\theta) - \sin 2\pi\sqrt{2}t.$$

Отсюда имеем $|x(t+p) - x(t)| = 2\pi\sqrt{2}\delta|\theta||\cos 2\pi\sqrt{2}(t+\delta\theta')| \leq 2\pi\sqrt{2}\delta$, так что при $0 < \delta < \varepsilon/(2\pi\sqrt{2})$ число p является ε-почти периодом.

(b) Для полученного $\delta > 0$ зададим $N = [1/\delta] + 1$ и положим $L = L(\varepsilon) = N\delta$. Поскольку $L > 1$, то на любом отрезке длины L и на любом отрезке длины $\sqrt{2}L$ найдутся целые точки. Пусть m_n и k_n – целые числа, такие что $m_n \in ((n-1)L, nL)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}k_n \in ((n-1)L, nL)$ для любого целого n.

(c) Обозначим $\pi_n = m_n - \frac{1}{\sqrt{2}}k_n$. Так как числа m_n и $\frac{1}{\sqrt{2}}k_n$ лежат на одном и том же интервале длины L, то $|\pi_n| < L$. Рассмотрим полуинтервалы $\lambda_j = [(j-1)\delta, j\delta)$, $j = -N+1, \ldots, N$, длины δ. Очевидно, $(-L, L) \subset \bigcup\limits_{j=-N+1}^{N} \lambda_j$, следовательно, каждое число π_n попадает в один из этих полуинтервалов. Введем величины

$$\nu_i = \begin{cases} \min\{|n| : \pi_n \in \lambda_i\} \\ +\infty, \text{ если нет такого } n, \text{ что } \pi_n \in \lambda_i, \end{cases}$$

и пусть $n_0 = \max\{\nu_i < +\infty : i = -N+1, \ldots, N, \}$. Тогда для любого n, такого, что $\pi_n \in \lambda_j$, найдется n', такое, что $|n'| \leq n_0$ и $\pi_{n'} \in \lambda_j$. Следовательно, числа π_n и $\pi_{n'}$ лежат на одном и том же интервале длины δ и поэтому $|\pi_n - \pi_{n'}| < \delta$ или, что то же самое, $\pi_n = \pi_{n'} + \delta\theta$ при некотором $|\theta| < 1$.

(d) Вспомнив определение π_n, получаем отсюда, что

$$m_n - m_{n'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_n - k_{n'}) + \delta\theta. \tag{4.2}$$

Кроме того, поскольку

$$\begin{gathered} (n-1)L < m_n < nL, \\ (-n_0 - 1)L \leq (n'-1)L < m_{n'} < n'L \leq n_0 L, \end{gathered}$$

то

$$(n - 1 - n_0)L < m_n - m_{n'} < (n + n_0 + 1)L. \tag{4.3}$$

(e) Наконец, обозначим $p_n = m_n - m_{n'}$, $q_n = k_n - k_{n'}$ и положим $\ell = \ell(\varepsilon) = (2n_0+3)L$. Тогда из (4.2) следует, что $|p_n - \frac{1}{\sqrt{2}}q_n| < \delta$, т.е. выполнены условия пункта (a). Следовательно, число p_n является ε-почти периодом. Окончательно, выбрав для каждого отрезка $[t, t+\ell]$ число n по формуле $n = [t/L] + n_0 + 2$, получим, что

$$\begin{gathered} t < ([t/L] + 1)L = (n - n_0 - 1)L, \\ t + \ell > [t/L]L + \ell = (n - n_0 - 2 + 2n_0 + 3)L = (n + n_0 + 1)L, \end{gathered}$$

т.е. $[(n-n_0-1)L,(n+n_0+1)L] \subset [t,t+\ell]$. А из соотношения (4.3) получаем, что на отрезке $[(n-n_0-1)L,(n+n_0+1)L]$ лежит ε-почти период p_n. Значит, на каждом отрезке оси длины ℓ лежит ε-почти период, что доказывает утверждение.

Аналогично можно доказать, что все функции из $\mathrm{Lin}(e^{i\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R})$ почти периодические. Подробное описание различных классов почти периодических функций содержится в [4].

§ 5. Разные задачи

Задача 21. *Доказать, что единичный шар в гильбертовом пространстве – строго выпуклое множество (множество M называется строго выпуклым, если для любых $x, y \in M$ и любого числа $\lambda \in (0,1)$ элемент $\lambda x + (1-\lambda)y$ принадлежит внутренности множества M).*

Задача 22. *Найти замыкание линейной оболочки множества $\{x_k = (1, a^k, a^{2k}, \dots,),$ $k = 1, 2, \dots\}$ в пространстве ℓ_2, если $a \in (0,1)$ – фиксированное число.*

Задача 23. *Сколько непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{4}$ помещается в единичный шар в пространстве ℓ_2?*

Задача 24. *Доказать, что в гильбертовом пространстве всякая последовательность ограниченных выпуклых замкнутых вложенных множеств имеет общую точку.*

Задача 25. *В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от элемента $y(t) = t^2$ до подпространства $M = \{x \in L_2[0,1] : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.*

Задача 26. *Найти расстояние от элемента e^t до линейной оболочки, натянутой на полиномы степени не выше 2, в пространстве $L_2[-1,1]$.*

Задача 27. *Являются ли множества $\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$ при фиксированном n и $\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$ линейными (замкнутыми) подпространствами в пространстве ℓ_2 ? Найти расстояние от элемента $\tilde{x} = (1,0,0,\dots)$ до этих множеств. Найти ортогональные дополнения к этим множествам.*

Задача 28. *Пусть M и N – подпространства в ℓ_2, натянутые на элементы вида $x = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$ и $y = (y_1, y_1, y_2, y_2/2, y_3, y_3/3, \dots)$ соответственно. Доказать, что M и N – подпространства, а $M + N$ – нет.*

Задача 29. *Пусть M и N – линейные подпространства гильбертова пространства и пусть для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1,\ x\in M,\ y\in N} \{|(x,y)|\} < 1 - \varepsilon.$$

Доказать, что $M + N$ – подпространство.

Задача 30. *Пусть L – линейное подпространство гильбертова пространства H, а f – ограниченный линейный функционал, заданный на L. Доказать, что f можно продолжить на все пространство без увеличения нормы единственным образом.*

Примечания

Теорема 1.1 может быть найдена в [3, стр. 10-11]. Читателю предполагаются известными теоремы 2.1 – 2.5; в данном пособии они приведены только для полноты изложения. О различных классах ортогональных полиномов см., например, [6]. Теорема 3.1 может быть найдена в [1] (см. также стр. 52-56). О базисах Рисса см. также [2, стр. 370 и далее]. Теорема 3.2 и пример после нее содержатся в [5, стр. 255-257]. О почти периодических функциях см. [4].

Список использованной литературы

[1] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,* Т.1, Харьков, 1977.

[2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве,* М., 1965.

[3] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства,* М., 1961.

[4] Б. М. Левитан, *Почти периодические функции,* М., 1953.

[5] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу,* М., 1979.

[6] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены,* М., 1979.

Учебники и задачники, рекомендованные к изучению по курсу функционального анализа

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,* Т.1, Харьков, 1977.

2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы теории функций и функционального анализа,* М., 1965.

3. К. Морен, *Методы гильбертова пространства,* М., 1965.

4. А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно, *Задачи и упражнения по функциональному анализу,* Минск, 1978.

5. В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев, *Методы решения задач по функциональному анализу,* Киев, 1990.

6. В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу,* М., 1984.

7. П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах,* М., 1970.

Содержание

Навчальне видання

Методичні вказівки
за курсом "Функціональный аналіз"
для студентів 4 курсу механіко-математичного факультету
(спеціальність прикладна математика)

Упорядник С.Ю.Ігнатович

Підп. до друку Формат 60x84/16. Папір різнографічний. Друк різнографічний. Умовн. друк. арк. 2,3. Облік.-вид. 2,7. Тираж 100 прим. Ціна договірна.

61077, пл. Свободи, 4, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. Видавничий центр.

Надруковано ПП "Азамаєв".