Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

А. В. Луценко, В. О. Скорик

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими матрицями

Методичний посібник
з курсу ≪Диференціальні рівняння≫
2-ге видання

Харків – 2013

УДК 517.926(075.8)
ББК 22.161.6я73
Л 86

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та керування Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна **Коробов В. І.**;

доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики Харківського національного університету радіоелектроніки **Шляхов В. В.**

Затверджено до друку рішенням Наково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 3 от 19.12.2013)

Л 86 **Луценко А. В. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими матрицями** : методичний посібник з курсу ≪Диференціальні рівняння≫ / А. В. Луценко, В. О. Скорик. – 2-ге вид., пер. з рос. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. – 23 с.

Посібник присвячений знаходженню фундаментальної матриці системи линійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та її застосуванню. У ньому викладені методи побудови спеціальної функції від матриці — матричної експоненти. Посібник може бути корисним студентам під час вивчення відповідного розділу з курсу ≪Диференціальні рівняння≫.

УДК 517.926(075.8)
ББК 22.161.6я73

Зміст

Вступ

У даному посібнику викладені методи побудови спеціальної функції від матриці — матричної експоненти, яка відіграє фундаментальну роль для інтегрування і дослідження систем із постійними коефіцієнтами. Спочатку наводяться необхідні відомості про мінімальний поліном матриці і про інтерполяційний поліном Лагранжа-Сільвестра, за допомогою яких визначається функція від матриці. Далі, на відміну від деяких підручників, у данному посібнику функція від матриці визначається як відображення множини квадратних матриць, на спектрі яких визначена дана скалярна функція, у множину квадратних матриць. Матрична експонента визначається як одна з функцій від матриці. Обґрунтовується фундаментальність матричної експоненти для лінійних систем із постійними матрицями. Наводяться три методи побудови матричної експоненти, у тому числі метод подання матричної експоненти у вигляді степеневого ряду.

Теоретичний матеріал ілюструється численними прикладами, що значно підвищує якість засвоєння студентами навчального матеріалу.

Щоб розв'язати неоднорідну систему $\dot{x} = Ax + f(t)$, достатньо знати фундаментальну матрицю однорідної системи. Ввівши до розгляду матричну експоненту, покажемо, що вона є фундаментальною матрицею системи $\dot{x} = Ax.$

Як відомо, щоб розв'язати неоднорідну систему $\dot{x} = Ax + f(t)$, достатньо знати фундаментальну матрицю однорідної системи. Ввівши до розгляду матричну експоненту, покажемо, що вона є фундаментальною матрицею системи $\dot{x} = Ax.$

1. Необхідні відомості з курсу лінійної алгебри

Позначимо через $\mathbb{C}^{m\times n}$ множину всіх комплексних $(m\times n)$-матриць. Нехай $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — квадратна матриця порядку n.

Характеристичним поліномом $\varphi(\lambda)$ матриці A називається визначник характеристичної матриці, тобто $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Корені характеристичного полінома матриці A називаються *власними значеннями (власними числами)* матриці A.

Спектром матриці A називається множина $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = 0\}$, тобто множина власних значень матриці A.

Нехай $g(\lambda)$ — скалярний поліном вигляду $g(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j \lambda^{m-j}$ з комплексними або дійсними коефіцієнтами. Матриця вигляду $g(A) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j A^{m-j}$ називається *матричним поліномом* або *поліномом від матриці* A. Будь-які два поліноми від однієї і тієї ж матриці є переставними.

Матриця A називається *коренем* полінома $g(\lambda)$, якщо $g(A) = 0$. Будь-яка квадратна матриця є коренем свого характеристичного полінома (теорема Гамільтона-Келі).

Скалярний поліном $g(\lambda)$ називається *анулюючим поліномом* квадратної матриці A, якщо $g(A) = 0$.

Мінімальним поліномом $m(\lambda)$ матриці A називається анулюючий поліном найменшого степеня зі старшим коефіцієнтом одиниця. Степінь мінімального полінома будемо позначати через p, тобто $\deg m(\lambda) = p$.

Оскільки в подальших побудовах мінімальний поліном відіграє вирішальну роль, наведімо його основні властивості.

1^0. *Анулюючий поліном $g(\lambda)$ матриці A, степінь якого менший за степінь мінімального полінома, є тотожним нулю (тобто $g(\lambda) \equiv 0$).*

2^0. *Кожний анулюючий поліном $g(\lambda)$ матриці A ділиться без залишку на мінімальний поліном.*

3^0. *Мінімальний поліном матриці A єдиний.*

4^0. *Якщо характеристичний поліном матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ є*

$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, *де* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — *попарно різні корені, то її мінімальний поліном має вигляд*

$$m(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{p_i}, \tag{1.1}$$

де $1 \le p_i \le n_i,\ i = 1, \ldots, k.$

5^0. *Якщо матриця* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *має прості власні значення, то її мінімальний поліном збігається з характеристичним.*

6^0. *Має місце рівність*

$$m(\lambda) = \varphi(\lambda)/D_{n-1}(\lambda),$$

де $D_{n-1}(\lambda)$ — *найбільший загальний дільник мінорів* $(n-1)$*-го порядку характеристичної матриці* $(\lambda I - A)$.

7^0. *Матриці* $I, A, \ldots, A^{p-1}$ *є лінійно незалежними.*

2. Визначення функції від матриці через інтерполяційний поліном

Нехай мінімальний поліном $m(\lambda)$ матриці A має вигляд (1.1).

Визначення 2.1. Скалярна функція $f(\lambda)$ *називається визначеною на спектрі матриці* A, *якщо для неї, як функції комплексної змінної, існують похідні* $f^{(j)}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i - 1$. *При цьому* p*-вимірний вектор-рядок*

$$f(\Lambda) = \Big(f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \ldots, f^{(p_1-1)}(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \ldots, f^{(p_k-1)}(\lambda_k)\Big)$$

називається значенням функції $f(\lambda)$ *на спектрі матриці* A.

Очевидно, кожний поліном визначений на спектрі будь-якої матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Нехай* $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ — *скалярні поліноми з комплексними коефіцієнтами. Для того щоб матричні поліноми* $g_1(A)$, $g_2(A)$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

збігалися, тобто щоб $g_1(A) = g_2(A)$, необхідно і достатньо, щоб $g_1(\Lambda) = g_2(\Lambda)$.

Доведення. Необхідність. Якщо $g_1(A) = g_2(A)$, то поліном $r(\lambda) = g_1(\lambda) - g_2(\lambda)$ є анулюючим поліномом матриці A. Тому за властивостями мінімального полінома маємо $r(\lambda) = m(\lambda)\psi(\lambda)$ або, на основі (1.1), $r(\lambda) = \psi(\lambda) \prod\limits_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{p_i}$, звідки одержуємо рівності

$$r^{(j)}(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \ \ j = 0, \dots, p_i - 1,$$

або

$$g_1^{(j)}(\lambda_i) = g_2^{(j)}(\lambda_i), \ i = 1, \dots, k, \ j = 0, \dots, p_i - 1,$$

тобто $g_1(\Lambda) = g_2(\Lambda)$.

Достатність. Якщо $g_1(\Lambda) = g_2(\Lambda)$, то для полінома $r(\lambda) = g_1(\lambda) - g_2(\lambda)$ виконується рівність $r(\Lambda) = 0$, тобто

$$r^{(j)}(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \ \ j = 0, \dots, p_i - 1.$$

Звідси випливає, що λ_i $(i = 1, \dots, k)$ є коренем полінома $r(\lambda)$ і його кратність, не менша за p_i. Тоді $r(\lambda) = \psi(\lambda) \prod\limits_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{p_i} = m(\lambda)\psi(\lambda)$. Тому $r(A) = m(A)\psi(A) = 0$ і $g_1(A) = g_2(A)$.

Наслідок 2.1. *Якщо $g_1(\lambda)$ — скалярний поліном, то для того, щоб $g_1(A) = 0$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, необхідно і достатньо, щоб $g_1(\Lambda) = 0$.*

Доведення. Достатньо в теоремі 2.1 покласти $g_2(\lambda) \equiv 0$.

Визначення 2.2. Інтерполяційним поліномом p-вимірного, де $p = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$, вектор-рядка

$$C = (c_{10}, \dots, c_{1,p_1-1}, \dots, c_{k0}, \dots, c_{k,p_k-1}) \tag{2.1}$$

на спектрі матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ називається скалярний поліном $r(\lambda)$, який задовольняє рівність

$$r(\Lambda) = C. \tag{2.2}$$

Якщо покласти $C = f(\Lambda)$, то отримаємо наступне визначення.

Визначення 2.3. Інтерполяційним поліномом функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A називається поліном $r(\lambda)$, який задовольняє рівність

$$r(\Lambda) = f(\Lambda). \tag{2.3}$$

Рівності (2.2), (2.3) називаються *інтерполяційними рівностями*.

Визначення 2.4. Нехай K — множина всіх квадратних комплексних матриць. Нехай $D(f)$ — множина матриць $A \in K$, на спектрі яких визначена функція $f(\lambda)$, тобто $D(f) = \{A \in K : \ \exists\ f(\Lambda)\}$. Функцією від матриці називається відображення $f: \ D(f) \to K$, яке діє за формулою

$$f(A) = r(A),$$

де $r(\lambda)$ — довільний інтерполяційний поліном функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A.

Неоднозначність, що немовби є у визначенні функції від матриці, ліквідується теоремою 2.1, за якою матриці $r(A)$ і $r_1(A)$ збігаються, якщо $r(\lambda)$, $r_1(\lambda)$ є інтерполяційними поліномами функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A.

Особливий інтерес для обчислень становить інтерполяційний поліном найменшого степеня.

Визначення 2.5. Інтерполяційний поліном p-вимірного вектор-рядка C вигляду (2.1) (функції $f(\lambda)$) на спектрі матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, степінь якого не перевищує $(p-1)$, називається інтерполяційним поліномом Лагранжа-Сільвестра вектор-рядка C (функції $f(\lambda)$) на спектрі матриці A.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для довільної матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ і довільного вектор-рядка $C \in \mathbb{C}^p$ (p — степінь мінімального полінома матриці A) існує єдиний інтерполяційний поліном Лагранжа-Сільвестра $r(\lambda)$ вектор-рядка C. Цей поліном визначається рівнянням*

$$\begin{vmatrix} r(\lambda) & C \\ g_1(\lambda) & g_1(\Lambda) \\ \dots & \dots \\ g_p(\lambda) & g_p(\Lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.4}$$

де $g_1(\lambda)$, ..., $g_p(\lambda)$ *— лінійно незалежні поліноми, степені яких не перевищують* $(p-1)$, *і має вигляд*

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p_i-1} c_{ij} h_{ij}(\lambda), \tag{2.5}$$

де $h_{ij}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i - 1$ *— лінійно незалежні поліноми, степені яких не вищі за* $(p-1)$ *і які задаються рівностями* $h_{ij}(\lambda) = -\Delta_{ij}(\lambda)/\Delta$, *де* Δ_{ij} *— алгебраїчне доповнення елемента* c_{ij} *у детермінанті (2.4), а*

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_1(\Lambda) \\ \ldots \\ g_p(\Lambda) \end{vmatrix}.$$

Доведення. Покажемо, що $\Delta \neq 0$. Від супротивного, нехай $\Delta = 0$. Тоді рядки визначника Δ лінійно залежні. Це означає, що існує ненульовий вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, такий, що

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i(\Lambda) = 0. \tag{2.6}$$

Розгляньмо поліном $\psi(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i g_i(\lambda)$. Оскільки степені поліномів $g_1(\lambda)$, ..., $g_p(\lambda)$ не перевищують $(p-1)$, то степінь $\psi(\lambda)$ не перевищує $(p-1)$. Із (2.6) випливає, що $\psi(\Lambda) = 0$. Тоді за наслідком 2.1 одержуємо $\psi(A) = 0$. Оскільки $\deg \psi(\lambda) < p$, то $\psi(\lambda) \equiv 0$, що суперечить лінійній незалежності поліномів $g_1(\lambda)$, ..., $g_p(\lambda)$.

Таким чином, $\Delta \neq 0$ і рівняння (2.4) визначає поліном $r(\lambda)$, який є лінійною комбінацією поліномів $g_1(\lambda), \ldots, g_p(\lambda)$, і, отже, $\deg r(\lambda) \leq p-1$.

Покажемо, що поліном $r(\lambda)$ задовольняє інтерполяційну рівність $r(\Lambda) = C$. Після диференціювання рівності (2.4) j разів отримаємо співвідношення такого ж вигляду, тільки елементи першого стовпця детермінанта заміняються їх похідними j-го порядку. Підставимо в отриману рівність $\lambda = \lambda_i$ і віднімемо від першого стовпця стовпець, першим елементом якого є c_{ij}, – маємо

$$\begin{vmatrix} r^{(j)}(\lambda_i)-c_{ij} & C \\ 0 & g_1(\Lambda) \\ \dots & \dots \\ 0 & g_2(\Lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(r^{(j)}(\lambda_i)-c_{ij}(\lambda_i))\Delta = 0, \quad i=1,\dots,k, \;\; j=0,\dots,p_i-1.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то

$$r^{(j)}(\lambda_i) = c_{ij}, \quad i=1,\dots,k, \;\; j=0,\dots,p_i-1,$$

тобто $r(\Lambda)=C$.

Таким чином, співвідношенням (2.4) дійсно визначається поліном $r(\lambda)$, який є інтерполяційним поліномом Лагранжа-Сільвестра p-вимірного вектор-рядка C на спектрі матриці A.

Доведімо, що він єдиний. Нехай $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$ — інтерполяційні поліноми Лагранжа-Сільвестра вектор-рядка C на спектрі матриці A. Тоді для полінома $r(\lambda) = r_1(\lambda) - r_2(\lambda)$, степінь якого менший за p, на основі (2.2) буде $r(\Lambda) = 0$. За наслідком 2.1 маємо $r(A) = 0$. А оскільки $\deg r(\lambda) < \deg m(\lambda)$, то $r(\lambda) \equiv 0$ і, отже, $r_1(\lambda) = r_2(\lambda)$.

Розвинемо визначник у (2.4) за елементами першого рядка, перенесемо всі доданки, окрім $r(\lambda)\Delta$, вправо і поділимо після цього на Δ. Отримаємо рівність (2.5). Оскільки $\deg \Delta_{ij}(\lambda) \leq p-1$, то і $\deg h_{ij} \leq p-1$.

Покажемо, що поліноми $h_{ij}(\lambda)$, $i=1,\dots,k$, $j=0,\dots,p_i-1$ лінійно незалежні. Дійсно, якщо це не так, то існує ненульовий вектор-рядок $C \in \mathbb{C}^p$ вигляду (2.1), для якого має місце тотожність

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} c_{ij}h_{ij}(\lambda) \equiv 0. \tag{2.7}$$

Як уже доведено в даній теоремі, інтерполяційний поліном Лагранжа-Сільвестра $r(\lambda)$ вектора C має вигляд

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} c_{ij}h_{ij}(\lambda).$$

На основі (2.7) маємо $r(\lambda) \equiv 0$ і, отже, $r^{(j)}(\lambda_i) = 0$, $j \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$. З іншого боку, оскільки $r(\lambda)$ — інтерполяційний поліном вектора C, то $r^{(j)}(\lambda_i) = c_{ij}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i-1$. Таким чином, $c_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i-1$, що суперечить припущенню про те, що $C \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для довільної функції $f(\lambda)$, визначеної на спектрі матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, існує єдиний інтерполяційний поліном Лагранжа-Сільвестра $r(\lambda)$ на спектрі матриці A. Цей поліном визначається рівнянням*

$$\begin{vmatrix} r(\lambda) & f(\Lambda) \\ g_1(\lambda) & g_1(\Lambda) \\ \cdots & \cdots \\ g_p(\lambda) & g_p(\Lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

де $g_1(\lambda)$, ..., $g_p(\lambda)$ — лінійно незалежні поліноми, степені яких не вищі за $(p-1)$, і має вигляд

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) h_{ij}(\lambda), \tag{2.8}$$

де $h_{ij}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i-1$ — лінійно незалежні поліноми, степені яких не перевищують $(p-1)$.

Доведення. Достатньо в (2.4), (2.5) покласти $C = f(\Lambda)$, тобто $c_{ij} = f^{(j)}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i - 1$.

НАСЛІДОК 2.2. *Якщо функція $f(\lambda)$ визначена на спектрі матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то*

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) h_{ij}(A). \tag{2.9}$$

Зокрема,

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p_i-1} t^j e^{\lambda_i t} h_{ij}(A). \tag{2.10}$$

Доведення. Дійсно, співвідношення (2.9) випливає з (2.8) і означення функції від матриці. Співвідношення (2.10) випливає з рівності (2.9), якщо в ній вибрати $f(\lambda) = e^{\lambda t}$.

3. Добуток функцій від матриці

Теорема 3.1. *Нехай функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ визначені на спектрі матриці A. Тоді функція $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ також визначена на спектрі матриці A і має місце рівність*

$$f(A) = f_1(A)f_2(A).$$

Доведення. Нехай $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$ — інтерполяційні поліноми Лагранжа-Сільвестра функцій $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ на спектрі матриці A відповідно. Тоді мають місце рівності

$$r_1^{(j)}(\lambda_i) = f_1^{(j)}(\lambda_i),\ \ r_2^{(j)}(\lambda_i) = f_2^{(j)}(\lambda_i),\ \ i = 1, \ldots, k, j = 0, \ldots, p_i - 1,$$

$$f_1(A) = r_1(A), \quad r_2(A) = f_2(A).$$

Покажемо, що $r(\lambda) = r_1(\lambda)r_2(\lambda)$ є інтерполяційним поліномом функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці A. Диференціюючи $r(\lambda)$, одержуємо

$$r^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{\ell=0}^{j} C_j^\ell r_1^{(\ell)}(\lambda_i) r_2^{(j-\ell)}(\lambda_i) = \sum_{\ell=0}^{j} C_j^\ell f_1^{(\ell)}(\lambda_i) f_2^{(j-\ell)}(\lambda_i) =$$

$$= f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, \ldots, k, \ \ j = 0, \ldots, p_i - 1.$$

Таким чином, $r(\Lambda) = f(\Lambda)$. За означенням функції від матриці маємо

$$f(A) = r(A) = r_1(A)r_2(A) = f_1(A)f_2(A).$$

Наслідок 3.1. *Нехай $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, t, t_1, t_2 — довільні дійсні числа. Тоді мають місце рівності:*

$$1)\ e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2};\ \ 2)\ \left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At};$$

$$3)\ e^{At}\big|_{t=0} = I; \qquad 4)\ e^{(A+\mu I)t} = e^{\mu t}e^{At}, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Доведення. 1. Дійсно, тут $f_1(\lambda) = e^{\lambda t_1}$, $f_2(\lambda) = e^{\lambda t_2}$ — функції, які визначені на спектрі будь-якої матриці A, $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = e^{\lambda(t_1+t_2)}$. Застосувавши теорему 3.1, одержуємо рівність $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$.

2. Тут $f_1(\lambda) = e^{\lambda t}$, $f_2(\lambda) = e^{-\lambda t}$, $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = 1$. За теоремою 3.1 отримуємо $f_1(A)f_2(A) = I$, тобто $e^{At}e^{-At} = I$.

3. Покладемо в 1) $t_1 = t$, $t_2 = -t$, маємо $e^{A\cdot 0} = e^{At}e^{-At} = I$.

4. Покладемо $f_1(\lambda) = e^{\lambda t}$, $f_2(\lambda) = e^{\mu t}$, тоді $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) = e^{(\lambda+\mu)t}$. За теоремою 3.1 одержуємо

$$e^{(A+\mu I)t} = f_1(A)f_2(A) = e^{At}e^{\mu t}I.$$

4. Приклади і задачі

Приклад 4.1. *Для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити: $a)$ $\exp(At)$; $b)$ $\sin(At)$.

Розв'язання. Характеристичний поліном має вигляд

$$\varphi(\lambda) = \det\,(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3.$$

Тоді $m(\lambda) = (\lambda - 1) \bigvee (\lambda - 1)^2 \bigvee (\lambda - 1)^3$. Оскільки $(A - I) \neq 0$, а $(A - I)^2 = 0$, то $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, $p = 2$, $\lambda_1 = 1$, $p_1 = 2$.

Отже, інтерполяційний поліном Лагранжа-Сільвестра має вигляд $r(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda$. Обчислюємо вектори

$$f(\Lambda) = (f(\lambda_1), f'(\lambda_1)), \qquad r(\Lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1, \alpha_1).$$

Інтерполяційна рівність $r(\Lambda) = f(\Lambda)$ дає

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 &= f(\lambda_1), \\ \alpha_1 &= f'(\lambda_1), \end{cases}$$

звідки

$$\alpha_0 = f(\lambda_1) - \lambda_1 f'(\lambda_1), \quad \alpha_1 = f'(\lambda_1),$$

і, отже,

$$r(\lambda) = f(\lambda_1) + (\lambda - \lambda_1)f'(\lambda_1). \tag{4.1}$$

a) Підставимо в (4.1) $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, одержуємо $r(\lambda) = e^t + (\lambda - 1)te^t$. Тоді

$$e^{At} = r(A) = e^t I + (A - I)te^t = \begin{pmatrix} 1+t & -t & -t \\ 2t & 1-2t & -2t \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix} e^t.$$

b) Підставимо в (4.1) $f(\lambda) = \sin(\lambda t)$, одержуємо

$$r(\lambda) = \sin t + (\lambda - 1)t\cos t,$$

звідки

$$\sin(At) = I\sin t + (A - I)t\cos t =$$
$$= \begin{pmatrix} \sin t + t\sin t & -t\cos t & -t\cos t \\ 2t\cos t & \sin t - 2t\cos t & -2t\cos t \\ -t\cos t & t\cos t & \sin t + t\cos t \end{pmatrix}.$$

4.2. Довести, що матриці $h_{ij}(A)$ з (2.9) лінійно незалежні.

4.3. Довести, що $\sum\limits_{i=1}^{k} h_{i0}(A) = I$.

4.4. Довести, що $\sum\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i h_{i0}(A) + h_{i1}(A)) = A$.

4.5. Довести, що якщо $\max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda < 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{At} = 0$.

4.6. Довести, що якщо $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, функція $f(\lambda)$ визначена на спектрі матриці A і $A = T^{-1}BT$, де $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то $f(A) = T^{-1}f(B)T$.

4.7 . Довести, що якщо A — невироджена матриця і її мінімальний поліном має вигляд $m(\lambda) = \lambda^p + b_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$, то

$$A^{-1} = f(A) = -\frac{1}{b_0}A^{p-1} - \frac{b_{p-1}}{b_0}A^{p-2} - \ldots - \frac{b_1}{b_0}I.$$

5. Представлення функції від матриці у вигляді степеневого ряду

Визначення 5.1. Послідовність матриць $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n\times q}$ *називається збіжною до матриці* $A \in \mathbb{C}^{n\times q}$ ($\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$), *якщо* $\lim\limits_{m\to\infty} \|A_m - A\| = 0$, *що рівносильно рівностям* $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{\mu\nu} = a^{\mu\nu}$, $\mu = 1,\ldots,n$, $\nu = 1,\ldots,q$, *де* $a_m^{\mu\nu}$ *— елементи матриці* A_m, $a^{\mu\nu}$ *— елементи матриці* A.

ТЕОРЕМА 5.1. *Нехай функції* $\{f_m(\lambda)\}_{m=1}^{\infty}$, $f(\lambda)$ *визначені на спектрі матриці* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *і*

$$\lim_{m\to\infty} f_m(\Lambda) = f(\Lambda). \tag{5.1}$$

Тоді

$$\lim_{m\to\infty} f_m(A) = f(A).$$

Доведення. Замінимо рівність (5.1) еквівалентними їй рівностями

$$\lim_{m\to\infty} f_m^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1,\ldots,k, \ \ j = 0,\ldots,p_i{-}1.$$

На підставі (2.9), із співвідношення

$$f_m(A) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} f_m^{(j)}(\lambda_i) h_{ij}(A), \quad m = 1,2,\ldots$$

отримуємо

$$\lim_{m\to\infty} f_m(A) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} \left(\lim_{m\to\infty} f_m^{(j)}(\lambda_i)\right) h_{ij}(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) h_{ij}(A)) = f(A).$$

Визначення 5.2. Матричний ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s$, *де* $A_s \in \mathbb{C}^{n\times q}$, *називається збіжним до матриці* $A \in \mathbb{C}^{n\times q}$, *якщо до матриці* A *збігається послідовність його часткових сум* $\sum\limits_{s=0}^{m} A_s$. *Якщо* A *— сума ряду, то пишуть* $A = \sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s$.

Теорема 5.2. *Нехай функція $f(\lambda)$ є сумою степеневого ряду*

$$f(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(\lambda - \lambda_0)^s$$

у крузі $S[\lambda_0, R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - \lambda_0| < R\}$ і нехай спектр матриці $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ належить $S[\lambda_0, R)$.

Тоді

$$f(A) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(A - \lambda_0 I)^s.$$

Доведення. Позначимо $u_s(\lambda) = c_s(\lambda - \lambda_0)^s$, $f_m(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{m} u_s(\lambda)$. Функція $f_m(\lambda)$ є поліномом, тому вона визначена на спектрі будь-якої матриці A. Оскільки у крузі збіжності степеневий ряд припускає почленне диференціювання і оскільки спектр матриці A належить цьому кругу, то

$$f^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{s=0}^{\infty} u_s^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, \ldots, k, \ \ j = 0, \ldots, p_i - 1, \tag{5.2}$$

тобто функція $f(\lambda)$ визначена на спектрі матриці A. Взявши до уваги, що число $f_m^{(j)}(\lambda_i) = \sum\limits_{s=0}^{m} u_s^{(j)}(\lambda_i)$ є частковою сумою збіжного ряду (5.2), одержуємо

$$\lim_{m \to \infty} f_m^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, \ldots, k \ \ j = 0, \ldots, p_i - 1. \tag{5.3}$$

Рівності (5.3) означають, що $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(\Lambda) = f(\Lambda)$. На основі теореми 5.1 робимо висновок, що $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(A) = f(A)$, тобто $f(A) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} u_s(A)$.

Наслідок 5.1. *Для матричної експоненти e^{At}, де $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, виконується рівність*

$$e^{At} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s. \tag{5.4}$$

Доведення. Оскільки рівність $e^{\lambda t} = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \lambda^s$ має місце для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$, то, після застосування теореми 5.2, отримуємо (5.4). □

6. Фундаментальність матричної експоненти

Теорема 6.1. *Матрична експонента* $\Phi(t) = e^{At}$, *де* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *є фундаментальною матрицею системи* $\dot{x} = Ax$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Доведення. Як відомо, матриця $\Phi(t)$ є фундаментальною матрицею системи $\dot{x} = Ax$ тоді і тільки тоді, коли

$$1)\ \det\Phi(t) \neq 0 \quad \text{хоча б в одній точці} \quad t \in \mathbb{R};$$

$$2)\ \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \quad \text{для} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справедливість 1) випливає з наслідку 3.1. Доведемо 2). За наслідком 2.2 маємо

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} t^j e^{\lambda_i t} h_{ij}(A),$$

звідки

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1}(jt^{j-1} + \lambda_i t^j)e^{\lambda_i t} h_{ij}(A). \tag{6.1}$$

З іншого боку, $f(A) = Ae^{At}$, якщо $f(\lambda) = \lambda e^{\lambda t}$. Оскільки

$$f^{(j)}(\lambda_i) = (jt^{j-1} + \lambda_i t^j)e^{\lambda_i t},$$

то на основі того ж наслідку 2.2 маємо

$$Ae^{At} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1}(jt^{j-1} + \lambda_i t^j)e^{\lambda_i t} h_{ij}(A).$$

Порівнюючи цей вираз із (6.1), одержуємо $de^{At}/dt = Ae^{At}$.

Теорема 6.2. *Кожна фундаментальна матриця* $\Phi(t)$ *системи* $\dot{x} = Ax$, *де* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *має наступну структуру:*

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} Q_i(t),$$

де $Q_i(t)$ *— поліном степеня* $(p_i - 1)$, *коефіцієнтами якого є* $(n\times n)$-*матриці.*

Доведення. Кожна фундаментальна матриця системи $\dot{x} = Ax$ має вигляд $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0)$. Дійсно, так як

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}\Phi(t)) = -Ae^{-At}\Phi(t)+e^{-At}\dot{\Phi}(t) = -Ae^{-At}\Phi(t)+e^{-At}A\Phi(t) = 0,$$

то $e^{-At}\Phi(t) = C$. Покладемо $t = 0$ і застосуємо наслідок 3.1, одержуємо $C = \Phi(0)$ і, отже, $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0)$.

За наслідком 2.2 маємо

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1} t^j e^{\lambda_i t} h_{ij}(A)\Phi(0) = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} Q_i(t),$$

де

$$Q_i(t) = \sum_{j=0}^{p_i-1} t^j h_{ij}(A)\Phi(0) = \sum_{j=0}^{p_i-1} t^j A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Покажемо, що $A_{i,p_i-1} \neq 0$. Припустивши, що $h_{i,p_i-1}(A)\Phi(0) = 0$, і врахувавши невиродженість матриці $\Phi(0)$, одержуємо, що $h_{i,p_i-1}(\lambda)$ — анулюючий поліном матриці A. Тоді, оскільки $\deg\, h_{i,p_i-1}(\lambda) < p$, за властивостями мінімального полінома маємо $h_{i,p_i-1}(\lambda) \equiv 0$, а це суперечить лінійній незалежності поліномів $h_{ij}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, p_i - 1$.

Таким чином, $\deg\, Q_i(t) = p_i - 1$.

ТЕОРЕМА 6.3. *Нехай мінімальний поліном $m(\lambda)$ матриці A має вигляд*

$$m(\lambda) = \lambda^p + b_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$$

і нехай

$$L(y) = y^{(p)} + b_{p-1}y^{(p-1)} + \ldots + b_1\dot{y} + b_0 y.$$

Тоді матричну експоненту $\exp(At)$ *можна подати у вигляді*

$$e^{At} = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s(t) A^s, \tag{6.2}$$

тут

$$\alpha_s(t) = \varphi(t)\widehat{\Phi}^{-1}(0)e_{s+1}, \quad s = 0, \ldots, p-1, \tag{6.3}$$

де $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t))$, *(*$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{p}$ *— фундаментальна система розв'язків рівняння* $L(y) = 0$*),* e_i *— i-тий стовпець одиничної матриці*

I порядку p,

$$\widehat{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \dots \\ \varphi^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Якщо в (2.10) перегрупувати праву частину за степенями матриці A, то одержимо співвідношення (6.2).

Покажемо, що функція $\alpha_s(t)$ є розв'язком наступної задачі Коші:

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ y^{(j)}(0) = \delta_{js}, \quad j = 0, \dots, p{-}1, \end{cases} \tag{6.4}$$

де δ_{js} — символ Кронекера. Продиференціювавши за t рівність (6.2), отримуємо

$$A^j e^{At} = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s^{(j)}(t) A^s, \quad j = 0, \dots, p. \tag{6.5}$$

Помножимо (6.5) на b_j ($b_p = 1$) і підсумуємо за j від 0 до p. Одержимо

$$m(A) e^{At} = \sum_{s=0}^{p-1} L(\alpha_s(t)) A^s. \tag{6.6}$$

Оскільки $m(A) = 0$, то з (6.6) випливає $\sum\limits_{s=0}^{p-1} L(\alpha_s(t)) A^s = 0$. Звідси, в силу лінійної незалежності матриць I, A, …, A^{p-1}, одержуємо

$$L(\alpha_s(t)) = 0, \quad s = 0, \dots, p{-}1. \tag{6.7}$$

Покажемо, що $\alpha_s(t)$ задовольняє початкові умови (6.4). Для цього покладемо $t = 0$ в рівності (6.5) для $j = 0, \dots, p{-}1$. Маємо

$$A^j = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s^{(j)}(0) A^s, \quad j = 0, \dots, p{-}1.$$

Звідси, в силу лінійної незалежності матриць I, A, …, A^{p-1}, одержуємо

$$\alpha_s^{(j)}(0) = \delta_{js}, \quad j = 0, \dots, p{-}1. \tag{6.8}$$

Таким чином, із (6.7)–(6.8) випливає, що $\alpha_s(t)$ є розв'язком задачі Коші (6.4).

З іншого боку, за теоремою про загальний розв'язок лінійного рівняння, функція $y_s(t) = \varphi(t)\widehat{\Phi}^{-1}(0)e_{s+1}$ є розв'язком рівняння $L(y) = 0$. В силу рівності

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \dot{\varphi}(0) \\ \dots \\ \varphi^{(p-1)}(0) \end{pmatrix} \widehat{\Phi}^{-1}(0)e_{s+1} = e_{s+1},$$

функція $y_s(t)$ задовольняє початкові умови $y_s^{(j)}(0) = \delta_{js}$, $j = 0, \dots, p-1$. Оскільки обидва розв'язки $\alpha_s(t)$, $y_s(t)$ рівняння $L(y) = 0$ задовольняють одинаковим початковим умовам, то вони збігаються, тобто $\alpha_s(t) = y_s(t)$.

Приклад 6.1. Побудувати матрицю e^{At}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Характеристичний поліном матриці A

$$\varphi(\lambda) = \det\,(\lambda I - A) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

має прості корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Тому її мінімальний поліном $m(\lambda)$ збігається з характеристичним, $p = 3$. Із (6.2) випливає, що

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2. \tag{6.9}$$

Вектор $\varphi(t)$ має вигляд $\varphi(t) = (e^{-t}, e^t, e^{2t})$, тому

$$\widehat{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t & e^{2t} \\ -e^{-t} & e^t & 2e^{2t} \\ e^{-t} & e^t & 4e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \widehat{\Phi}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Формулою (6.3) визначаємо

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{3}\,e^{-t} + e^t - \frac{1}{3}\,e^{2t},$$
$$\alpha_1(t) = \operatorname{sh} t,$$
$$\alpha_2(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}\,e^t + \frac{1}{3}\,e^{2t}.$$

Підставимо вираз для $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ в (6.9), одержуємо

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t} & e^{t} - e^{2t} & -\frac{1}{6}\,e^{-t} - \frac{1}{2}\,e^{t} + \frac{2}{3}\,e^{2t} \\ \operatorname{sh} t & e^{t} & -\operatorname{sh} t \\ -\frac{5}{6}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^{t} + \frac{2}{3}\,e^{2t} & e^{t} - e^{-t} & \frac{5}{6}\,e^{-t} - \frac{1}{2}\,e^{t} + \frac{2}{3}\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$

7. Приклади і задачі

7.1. Довести, що якщо $AB = BA$, де $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, то $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$.

7.2. Довести, що якщо одне із власних чисел матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ має додатну дійсну частину, то система $\dot{x} = Ax$ має розв'язок $\varphi(t)$, який задовольняє умову $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\varphi(t)\| = \infty$.

7.3. Довести, що якщо $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{At} = 0$, то всі власні числа матриці $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ мають від'ємну дійсну частину.

7.4. Довести, що якщо $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то всі елементи матриці e^{At} для $t \geq 0$ є невід'ємними тоді і тільки тоді, коли є невід'ємними всі недіагональні елементи матриці A.

7.5. Довести, що якщо компоненти неперервної вектор-функції $f(t) \in \mathbb{R}^n$ є невід'ємними за $t \geq 0$ і якщо недіагональні елементи матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ також є невід'ємними, то система $\dot{x} = Ax + f(t)$ має розв'язок, компоненти якого невід'ємні за $t \geq 0$.

7.6. Довести: якщо $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ і $\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda < 0$, то $A^{-1} = -\int\limits_0^\infty e^{At}dt$.

7.7. Знайти фундаментальну матрицю e^{At} системи $\dot{x} = Ax$.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3)$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=1\pm 2i)$.

3. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2)$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=2)$.

5. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=1)$.

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-5)$.

Висновок

У даному посібнику наведено три методи побудови матричної експоненти, у тому числі метод подання матричної експоненти у вигляді степеневого ряду. На відміну від деяких підручників, у ньому функція від матриці визначається як відображення множини квадратних матриць, на спектрі яких визначена дана скалярна функція, у цю ж множину. Матрична експонента визначається як одна з функцій від матриці.

Цей методичний посібник значно підвищує якість засвоєння студентами навчального матеріалу.

Список літератури

1. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988.– 546 с.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1982. – 331 с.
4. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – М. : Наука, 1978. – 552 с.
5. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ ≪Регулярная и хаотическая динамика≫, 2000. – 176 с.

Навчальне видання

Луценко Анатолій Васильович
Скорик Василь Олександрович

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими матрицями

Методичний посібник
з курсу ≪Диференціальні рівняння≫

Коректор *А. І. Сєдих*
Комп'ютерне верстання *В. О. Скорик*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 1,03.
Тираж 50 пр. Замовлення № 241/13.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009.
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32
