Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

А. В. Луценко, В. А. Скорик

Функция Грина и ее применение

Методическое пособие

по курсу ≪Дифференциальные уравнения≫

Харьков – 2013

УДК 517.926/.927(075.8)
ББК 22.161.6я73
Л 86

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и управления Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **Коробов В. И.**;

доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Харьковского национального университета радиоэлектроники **Шляхов В. В.**

Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 3 от 19.12.2013)

Л 86 **Луценко А. В. Функция Грина и ее применение** : методическое пособие по курсу ≪Дифференциальные уравнения≫ / А. В. Луценко, В. А. Скорик. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. – 28 с.

В данном пособии вводятся функции Грина для уравнения и системы уравнений и приводятся необходимые и достаточные условия их существования, дается их аналитическое представление. На этой основе определяется функция Грина краевой задачи, доказывается ее существование и разрешимость краевой задачи. Данное пособие будет полезным студентам при изучении курса ≪Дифференциальные уравнения≫, а также аспирантам этой специальности.

УДК 517.926/.927(075.8)
ББК 22.161.6я73

Содержание

Введение

Методическое пособие посвящено разделу ≪Функция Грина и ее применение≫ курса ≪Дифференциальные уравнения≫ механико-математического факультета. В отличие от традиционной схемы изложения учебного материала по указанному разделу, в методическом пособии впервые в мировой литературе вводится понятие функции Грина линейного дифференциального уравнения и линейной системы дифференциальных уравнений. Приводятся необходимые и достаточные условия существования функций Грина, дается их аналитическое представление через фундаментальную систему решений, устанавливается их связь с решениями неоднородного уравнения и неоднородной системы.

На базе введенной функции Грина дифференциального уравнения определяется функция Грина краевой задачи. Функция Грина краевой задачи рассматривается как элемент множества функций Грина уравнения или системы уравнений. В отличие от работ [1]–[6], где даются только достаточные условия существования и единственности, здесь приводятся необходимые и достаточные условия существования и единственности функции Грина краевой задачи и дается ее аналитическое представление через фундаментальную систему решений и краевые условия. При таком подходе отпадает необходимость привлечения, как в [1]–[4], функций влияния, δ-функций, проекторов.

Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами, что значительно повышает качество усвоения студентами учебного материала.

1. Функция Грина линейного дифференциального уравнения n-го порядка

1.1. Определение и вид функции Грина

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$L_n(y) = f(t), \quad n \geq 2, \tag{1.1}$$

где $L_n(y) = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y$, $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $f(t)$ – определенные на $[a,b]$ функции.

Обозначим $\mathrm{Q} = \{(t,\tau):\ t \in [a,b],\ \tau \in [a,b]\}$.

Определение 1.1. Функцией Грина уравнения (1.1) называется числовая функция $G(t,\tau)$, определенная в квадрате Q и обладающая следующими свойствами:

1^0. *Функция $G(t,\tau)$ и ее производные по t до $(n-2)$ порядка включительно непрерывны по t на $[a,b]$.*

2^0. *Производные по t $(n-1)$-го и n-го порядков непрерывны по t в множестве $[a,\tau)\bigcup(\tau,b]$.*

3^0. *Производная по t порядка $(n-1)$ в точке $t=\tau$ терпит скачок, равный единице*

$$\frac{\partial^{n-1}G(\tau+0,\tau)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}G(\tau-0,\tau)}{\partial t^{n-1}} = 1.$$

4^0. *При $t \neq \tau$ функция $G(t,\tau)$, как функция t, удовлетворяет однородному уравнению $L_n(y) = 0$.*

Теорема 1.1.*Пусть $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $f(t)$ непрерывные на $[a,b]$ функции и пусть $\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$ – фундаментальная система решения однородного уравнения $L_n(y) = 0$.*

Тогда:

а) *функция Грина уравнения (1.1) существует и имеет вид*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \varphi^*(t)b(\tau), & t \leq \tau, \\ \varphi^*(t)(b(\tau) + \Phi^{-1}(\tau)e_n), & \tau < t, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\varphi^*(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $b(\tau) = (b_1(\tau), \dots, b_n(\tau))^*$ *– произвольный вектор,* $\Phi(t)$ *– матрица Вронского функций* $\varphi_1(t)$, $\dots$, $\varphi_n(t)$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)^*$ *–* n*-мерный вектор;*

б) *при любой непрерывной функции* $b(\tau)$ *функция*

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau) f(\tau) dt$$

является частным решением уравнения (1.1).

Доказательство. а). Поскольку функция Грина в промежутках $[a, \tau)$ и $(\tau, b]$ является решением уравнения $L_n(y) = 0$, то ее следует строить в виде

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \varphi^*(t) b(\tau), & t \le \tau, \\ \varphi^*(t) c(\tau), & \tau < t, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $b(\tau)$, $c(\tau)$ – n-мерные вектор-функции, определенные на $[a, b]$. В таком случае функция G и ее производные по t до $(n-2)$-го порядка включительно будут непрерывны по t на $[a, \tau) \bigcup (\tau, b]$. Они станут непрерывными на всем $[a, b]$, если при $t = \tau$ будут выполняться равенства

$$\begin{aligned} &\varphi^*(\tau)(c(\tau) - b(\tau)) = 0, \\ &(\dot{\varphi}(\tau))^*(c(\tau) - b(\tau)) = 0, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &(\varphi^{(n-2)}(\tau))^*(c(\tau) - b(\tau)) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Согласно свойству 3^0, при переходе через точку $t = \tau$ производная по t $(n-1)$-го порядка функции Грина терпит скачок, равный единице. Следовательно, имеем

$$(\varphi^{(n-1)}(\tau))^*(c(\tau) - b(\tau)) = 1. \tag{1.5}$$

Систему (1.4)–(1.5) запишем в виде уравнения

$$\Phi(\tau)(c(\tau) - b(\tau)) = e_n. \tag{1.6}$$

Поскольку $\Phi(t)$ является невырожденной матрицей, то из (1.6) получаем

$$c(\tau) - b(\tau) = \Phi^{-1}(\tau) e_n. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что $(c(\tau) - b(\tau))$ – непрерывная функция. Выразив из (1.7) функцию $c(\tau)$ через $b(\tau)$ и подставив ее в (1.3), получим (1.2).

б). Покажем, что при непрерывной функции $b(\tau)$ функция

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau) f(\tau) dt$$

удовлетворяет уравнению (1.1). Подставив выражение для $G(t,\tau)$ из (1.2), получаем функцию $y(t)$ в виде

$$y(t) = \varphi^*(t) g(t), \tag{1.8}$$

где вектор-функция $g(t)$ имеет вид

$$g(t) = \int\limits_a^t \left(b(\tau) + \Phi^{-1}(\tau) e_n\right) f(\tau) dt + \int\limits_t^b b(\tau) f(\tau) dt.$$

Учитывая, что

$$\begin{pmatrix} \varphi^*(t) \\ \dot{\varphi}^*(t) \\ \dots \\ (\varphi^*(t))^{(n-1)} \end{pmatrix} \Phi^{-1}(t) e_n = e_n,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= (\varphi^*(t))^{(k)} g(t), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ y^{(n)}(t) &= (\varphi^*(t))^{(n)} g(t) + f(t). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Подставляя выражения для $y(t)$, $\dot{y}(t)$, …, $y^{(n-1)}(t)$ из равенств (1.8), (1.9) в уравнение (1.1), имеем

$$L_n(y(t)) = L_n(\varphi^*(t)) g(t) + f(t). \tag{1.10}$$

Так как $\varphi^*(t)$ – вектор-строка, составленная из n функций $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ фундаментальной системы решений уравнения $L_n(y) = 0$, то

$$L_n(\varphi^*(t)) = (L_n(\varphi_1), \dots, L_n(\varphi_n)) = (0, \dots, 0). \tag{1.11}$$

На основании равенства (1.11) из равенства (1.10) получаем

$$L_n(y(t)) = f(t).$$

1.2. Пример

Для уравнения

$$\ddot{y} + y = \cos\ t \tag{1.12}$$

найти функцию Грина и с ее помощью частное решение этого уравнения.

Решение. Фундаментальная система решений уравнения (1.12) имеет вид $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$. Матрица Вронского этих функций

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\Phi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \Phi^{-1}(\tau)e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу (1.2) функция Грина для уравнения (1.1) имеет вид

$$G(t,\tau) = \begin{cases} b_1(\tau)\cos t + b_2(\tau)\sin t, & t \le \tau, \\ (b_1(\tau) - \sin\tau)\cos t + (b_2(\tau) + \cos\tau)\sin t, & \tau < t. \end{cases}$$

Найдем частное решение. Так как функции $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$ являются произвольными, то, для простоты, выберем их равными нулю. Тогда

$$G(t,\tau) = \begin{cases} 0, & t \le \tau, \\ \sin(t-\tau), & \tau < t. \end{cases}$$

Тогда частное решение уравнения (1.1) задается формулой

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)\cos\tau d\tau = \int\limits_a^t \sin(t-\tau)\cos\tau d\tau$$

и, например, при $a = 0$ имеет вид

$$y(t) = \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau d\tau = \frac{1}{2}\,t\sin t.$$

1.3. Упражнения для самостоятельного решения

1. Показать, что если $K(t,\tau)$ – функция Коши уравнения (1.1), то

$$G(t,\tau)=\begin{cases}0, & t\le\tau,\\ K(t,\tau), & \tau\le t,\end{cases}$$

является функцией Грина уравнения (1.1).

2. Найти функцию Грина и с ее помощью частное решение следующих уравнений

2.1. $\ddot{y}-y=2t-\pi.$

2.2. $\ddot{y}-y=2e^t-t^2.$

2.3. $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=\sin t.$

2.4. $\ddot{y}-5\dot{y}+4y=4t^2e^{2t}.$

2.5 $t^2\ddot{y}+2t\dot{y}=t^3.$

2.6. $t^2\ddot{y}-2t\dot{y}+2y=\sin t.$

2.7. $\ddot{y}-y=2t.$

2.8. $\ddot{y}+\dot{y}-2y=3te^t.$

2.9. $\ddot{y}-2\dot{y}+y=\frac{1}{t}\,e^t.$

2.10. $\ddot{y}+3\dot{y}-4y=e^{-4t}.$

2.11. $t^2\ddot{y}-2y=t^2e^t.$

2.12. $t^2\ddot{y}+5t\dot{y}+3y=1.$

2. Краевая задача для уравнения *n*-го порядка

В задаче Коши значения неизвестной функции и ее производных задаются в одной фиксированной точке. Многие проблемы физики и механики приводят к задачам, описываемым дифференциальными уравнениями, для которых значения неизвестной функции и ее производных задаются в двух или нескольких точках. Такие задачи получили название краевых.

2.1. Определение краевой задачи и свойства ее решений

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1).

Определение 2.1. Равенства

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(m_{ij}\,y^{(j-1)}(a)+n_{ij}\,y^{(j-1)}(b)\Big)=0,\quad i=1,\dots,n, \tag{2.1}$$

где m_{ij}, n_{ij} *– постоянные, называются краевыми условиями.*

Если ввести матрицы $M=(m_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $N=(n_{ij})_{i,j=1}^{n}$ и вектор

$$x(t)=\begin{pmatrix} y(t)\\ \dot y(t)\\ \dots\\ y^{(n-1)}(t)\end{pmatrix},$$

то краевые условия (2.1) можно записать в виде $Mx(a)+Nx(b)=0$. В дальнейшем считаем, что $\mathrm{rank}(M,N)=n$.

Определение 2.2. Однородной краевой задачей называется задача

$$L_n(y)=0, \tag{2.2}$$

$$Mx(a)+Nx(b)=0, \tag{2.3}$$

т. е. задача нахождения решения однородного уравнения (2.2), удовлетворяющего краевым условиям (2.3).

Определение 2.3. Неоднородной краевой задачей называется задача

$$L_n(y) = f(t), \tag{2.4}$$

$$Mx(a) + Nx(b) = 0, \tag{2.5}$$

т. е. задача нахождения решения неоднородного уравнения (2.4), удовлетворяющего краевым условиям (2.5).

Например, краевая задача

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(\pi/2) = 0, \end{cases}$$

состоит в отыскании решений уравнения $\ddot{y} + 4y = 0$, обращающихся в ноль на концах отрезка $[0, \pi/2]$. Легко видеть, что такими решениями является $y(t) = c \sin 2t$.

Лемма 2.1.

а). *Если $y_0(t)$ – решение однородной краевой задачи, $y_1(t)$ – решение неоднородной краевой задачи, то их сумма $(y_0(t)+y_1(t))$ является решением неоднородной краевой задачи.*

б). *Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ – решения неоднородной краевой задачи, то их разность $(y_1(t)-y_2(t))$ является решением однородной краевой задачи.*

Доказательство. а). Так как $L_n(y_0 + y_1) = f(t)$,

$$M\left(x_0(a) + x_1(a)\right) + N\left(x_0(b) + x_1(b)\right) =$$

$$= Mx_0(a) + Nx_0(b) + Mx_1(a) + Nx_1(b) = 0,$$

где

$$x_0(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \dot{y}_0(t) \\ \dots \\ y_0^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad x_1(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

то $(y_0(t) + y_1(t))$ есть решение задачи (2.4)–(2.5).

б). Так как $L_n(y_1 - y_2) = 0$ и

$$M\left(x_1(a) - x_2(a)\right) + N\left(x_1(b) - x_2(b)\right) =$$

$$= Mx_1(a) + Nx_1(b) - Mx_2(b) - Nx_2(b) = 0,$$

где

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dots \\ y_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

то $(y_1(t) - y_2(t))$ есть решение задачи (2.2)–(2.3). □

Лемма 2.2. *Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (2.2), $\Phi(t)$ – матрица Вронского этой системы функций.*

а). *Для того, чтобы однородная краевая задача имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица $V = M\Phi(a) + N\Phi(b)$ была невырожденной.*

б). *Для того, чтобы решение неоднородной краевой задачи было единственным, необходимо и достаточно, чтобы матрица V была невырожденной.*

Доказательство. а). Решение однородной краевой задачи может быть записано в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) = \varphi^*(t)c,$$

где $\varphi^*(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $c = (c_1, \dots, c_n)^*$ – некоторый постоянный вектор. В силу краевых условий (2.3) получаем

$$M \begin{pmatrix} \varphi^*(a)c \\ \dot{\varphi}^*(a)c \\ \dots \\ (\varphi^*)^{(n-1)}(a)c \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} \varphi^*(b)c \\ \dot{\varphi}^*(b)c \\ \dots \\ (\varphi^*)^{(n-1)}(b)c \end{pmatrix} = 0,$$

или $M\Phi(a)c + N\Phi(b)c = 0$, т. е.

$$Vc = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, вопрос о существовании только тривиального решения краевой задачи (2.2)–(2.3) сведен к вопросу о существовании только тривиального решения алгебраической системы (2.6). Эта система содержит n линейных однородных уравнений относительно n неизвестных $c_1, \ldots,$ c_n. В силу известной теоремы линейной алгебры для того, чтобы система (2.6) имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица V была невырожденной.

б). Пусть неоднородная краевая задача имеет единственное решение $y_1(t)$, однако матрица V является вырожденной. Тогда, как установлено выше, однородная краевая задача имеет решение $y_0(t) \neq 0$. В силу леммы 2.1 функция $y_2(t) = y_0(t)+y_1(t)$ будет еще одним решением неоднородной задачи, отличным от решения $y_1(t)$, что противоречит предположению.

Обратно, пусть V – невырожденная матрица. Допустим, что неоднородная краевая задача имеет два решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_1(t) \neq y_2(t)$. Тогда в силу леммы 2.1 функция $y_0(t) = y_1(t)-y_2(t)$ будет ненулевым решением однородной краевой задачи, что невозможно в силу а).

2.2. Функция Грина и решение неоднородной краевой задачи

Определение 2.4. Функцией Грина неоднородной краевой задачи называется функция Грина уравнения (2.4), удовлетворяющая краевым условиям (2.5), т. е. для которой

$$M \begin{pmatrix} G(a,\tau) \\ \ldots \\ G^{(n-1)}(a,\tau) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} G(b,\tau) \\ \ldots \\ G^{(n-1)}(b,\tau) \end{pmatrix} = 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть в (2.4) функции $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[a,b]$.*

Тогда:

а) для существования функции Грина неоднородной краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы для любого $\tau \in [a,b]$ была совместной система

$$Vb(\tau) = -N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau)e_n, \tag{2.7}$$

т. е. чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank} V = \operatorname{rank}\,(V, N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau)e_n), \tag{2.8}$$

где $V = M\Phi(a) + N\Phi(b)$;

б) для существования и единственности функции Грина неоднородной краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} V = n$. *В этом случае функция Грина имеет вид*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \varphi^*(t)F\Phi^{-1}(\tau)e_n, & t \le \tau, \\ \varphi^*(t)(I+F)\Phi^{-1}(\tau)e_n, & \tau < t, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $F = -V^{-1}N\Phi(b)$*;*

в) при непрерывной функции $b(\tau)$ *из (2.7) функция*

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.10}$$

является решением неоднородной краевой задачи (2.4)–(2.5), причем в случае $\operatorname{rank} V = n$ *это решение единственное.*

Доказательство. а). В силу теоремы 1.1 любая функция Грина уравнения (2.4) имеет вид

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \varphi^*(t)b(\tau), & a \le t \le \tau, \\ \varphi^*(t)(b(\tau)+\Phi^{-1}(\tau)e_n), & \tau < t \le b, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $b(\tau)$ – произвольная определенная на $[a,b]$ вектор-функция. Подставим (2.11) в краевые условия (2.5). Имеем

$$0{=}M\begin{pmatrix} \varphi^*(a)b(\tau) \\ . \quad . \quad . \\ \left(\varphi^{(n-1)}(a)\right)^*b(\tau) \end{pmatrix} +N\begin{pmatrix} \varphi^*(b)(b(\tau)+\Phi^{-1}(\tau)e_n) \\ . \quad . \quad . \\ \left(\varphi^{(n-1)}(b)\right)^*(b(\tau){+}\Phi^{-1}(\tau)e_n) \end{pmatrix} =$$

$$= M\Phi(a)b(\tau) + N\Phi(b)(b(\tau)+\Phi^{-1}(\tau)e_n) =$$

$$= Vb(\tau) + N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau)e_n,$$

откуда получаем (2.7).

Как известно, система (2.7) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.8).

б). Из (2.7) получаем, что функция $b(\tau)$ существует и единственная тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} V = n$. В этом случае

$$b(\tau) = -V^{-1}N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau)e_n.$$

Подставляя это выражение для $b(\tau)$ в (2.11), получаем (2.9).

в). В силу теоремы (1.1) функция (2.10) является решением уравнения (2.4). Убедимся, что она удовлетворяет краевым условиям. Для этого подставим функцию из (2.10) в левую часть краевых условий (2.5). Имеем

$$M\begin{pmatrix} y(a) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} + N\begin{pmatrix} y(b) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(b) \end{pmatrix} =$$

$$\int\limits_a^b \left(M\begin{pmatrix} G(a,\tau) \\ \dots \\ G^{(n-1)}(a,\tau) \end{pmatrix} + N\begin{pmatrix} G(b,\tau) \\ \dots \\ G^{(n-1)}(b,\tau) \end{pmatrix} \right) f(\tau)d\tau = 0.$$

Наконец, в силу леммы 2.2 при условии $\operatorname{rank} V = n$ функция $y(t)$ является единственным решением задачи (2.4)-(2.5).

2.3. Пример

Построив функцию Грина, решить краевую задачу

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = \cos t, \\ y(0) = 0, \\ y(\pi/2) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Решение. Фундаментальная система решений уравнения $\ddot{y}+y=0$ имеет вид $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$. Матрица Вронского

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Матрицы M, N из краевых условий (2.5) имеют в данном примере вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим следующие матрицы

$$V = M\Phi(0) + N\Phi(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I,$$

$$F = -V^{-1}N\Phi(\pi/2) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F\Phi^{-1}(\tau)e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\tau \end{pmatrix},$$

$$(I + F)\Phi^{-1}(\tau)e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\varphi^*(t) = (\cos t, \sin t)$, то на основании (2.9) получаем

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -\sin t \cos\tau, & 0 \le t \le \tau, \\ -\cos t \sin\tau, & \tau < t \le \pi/2. \end{cases}$$

Искомое решение задачи (2.12) имеет вид

$$y(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G(t,\tau)\cos\tau d\tau = -\cos t \int\limits_0^t \sin\tau\cos\tau d\tau - \sin t \int\limits_t^{\pi/2} \cos^2\tau d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t \sin^2 t - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\sin t = \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sin t.$$

2.4. Упражнения для самостоятельного решения

1. При каких значениях a существует функция Грина краевой задачи

$$\ddot{y} + ay = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

2. Построить функцию Грина для каждой из краевых задач:

2.1. $\ddot{y} = f(t)$, $y(0) + y(1) = 0$, $\dot{y}(0) + \dot{y}(1) = 0$.

2.2. $\ddot{y} = f(t)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

2.3. $\ddot{y} = f(t)$, $y(0) - y(\pi) = 0$, $\dot{y}(0) - \dot{y}(\pi) = 0$.

2.4. $\ddot{y} = f(t)$, $\dot{y}(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

2.5. $\ddot{y} + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

2.6. $\ddot{y} + y = f(t)$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{y}(2) + y(2) = 0$.

2.7. $\ddot{y} - y = f(t)$, $y(-1) = y(1)$, $\dot{y}(-1) = \dot{y}(1)$.

2.8. $t\ddot{y} - \dot{y} = f(t)$, $\dot{y}(1) = 0$, $y(2) = 0$.

2.9. $t^2\ddot{y} + t\dot{y} - y = f(t)$, $y(1) = 2y(2)$, $\dot{y}(1) + 4\dot{y}(2) = 0$.

2.10. $t^2\ddot{y} + 2t\dot{y} = f(t)$, $y(1) = 0$, $\dot{y}(3) = 0$.

2.11. $t^2\ddot{y} + 2y = f(t)$, $y(1) = 0$, $y(2) + 2\dot{y}(2) = 0$.

3. Построив функцию Грина, решить краевую задачу.

3.1. $\ddot{y} + y = 2t - \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

3.2. $\ddot{y} + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

3.3. $t\ddot{y} - \dot{y} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{t^2}$, $y(1) - \dot{y}(1) = 0$, $3y(2) - 2\dot{y}(2) = 0$.

3. Функция Грина системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{3.1}$$

где $A(t)$ – матрица размерности $(n\times n)$, $f(t)$ – n-мерная вектор-функция, которые определены на $[a, b]$.

3.1. Определение и вид функции Грина

Обозначим $\mathrm{Q} = [a, b]\times[a, b]$.

Определение 3.1. Функцией Грина системы (3.1) называется $(n\times n)$-*матрица* $G(t, \tau)$, *определенная в квадрате* Q *и обладающая следующими свойствами:*

1^0*) функции* $G(t, \tau)$ *и* $\partial G(t, \tau)/\partial t$ *являются непрерывными по* t *на* $[a, \tau) \bigcup (\tau, b]$;

2^0*) в точке* $t = \tau$ *функция* $G(t, \tau)$ *терпит скачок, равный единичной матрице:*

$$G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = I; \tag{3.2}$$

3^0*) при* $t \neq \tau$ *функция* $G(t, \tau)$, *как функция* t, *удовлетворяет однородному матричному уравнению* $\dot{X} = A(t)X$, *т. е.*

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} = A(t)G(t, \tau) \quad \text{при} \quad t \neq \tau.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $A(t)$, $f(t)$ *- непрерывные на* $[a, b]$ *и пусть* $\Phi(t)$ *– фундаментальная матрица однородной системы* $\dot{x} = A(t)x$. *Тогда*

а) функция Грина системы (3.1) существует и имеет вид

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t)B(\tau), & t \leq \tau, \\ \Phi(t)(B(\tau) + \Phi^{-1}(\tau)), & \tau < t, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $B(\tau)$ *– произвольная определенная на* $[a, b]$ $(n\times n)$-*матрица.*

б) при любой непрерывной $B(\tau)$ функция $x(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau$ является частным решением системы (3.1).

Доказательство. а). Так как функция Грина при $a \le t < \tau$ и $\tau < t \le b$ является решением уравнения $\dot{X} = A(t)X$, то ее следует строить в виде

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Phi(t)B(\tau), & a \le t < \tau, \\ \Phi(t)C(\tau), & \tau < t \le b, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $B(\tau)$, $C(\tau)$ – $(n\times n)$-матрицы, определенные на $[a,b]$. Очевидно, эта функция $G(t,\tau)$ будет непрерывной по t на $[a,\tau)\bigcup(\tau,b]$.

В силу (3.2), при переходе через точку $t=\tau$ функция Грина терпит скачок, равный единичной матрице. Поэтому из (3.4) имеем

$$\Phi(\tau)C(\tau) - \Phi(\tau)B(\tau) = I,$$

откуда

$$C(\tau) = \Phi^{-1}(\tau) + B(\tau).$$

Подставив найденную матрицу $C(\tau)$ в (3.4), получим (3.3).

б). Теперь покажем, что при непрерывной матрице $B(\tau)$ функция

$$x(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

удовлетворяет уравнению (3.1). Подставив сюда $G(t,\tau)$ из (3.3), имеем эту функцию $x(t)$ в виде

$$x(t) = \Phi(t)\Big(\int\limits_a^t \left(B(\tau) + \Phi^{-1}(\tau)\right) f(\tau)d\tau + \int\limits_t^b B(\tau)f(\tau)d\tau\Big). \tag{3.5}$$

Отсюда получаем, что производная $\dot{x}(t)$ имеет вид

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t)\Big(\int\limits_a^t \left(B(\tau) + \Phi^{-1}(\tau)\right) f(\tau)d\tau + \int\limits_t^b B(\tau)f(\tau)d\tau\Big) +$$

$$+\Phi(t)\left(B(t) + \Phi^{-1}(t) - B(t)\right) f(t),$$

откуда на основании равенства $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ и представления (3.5) получаем

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t).$$

3.2. Пример

Для системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \cos t, \end{cases}$$

найти функцию Грина и с ее помощью определить частное решение этой системы.

Решение. Для данной системы имеем

$$A(t) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу (3.3) функция Грина имеет вид

$$G(t,\tau) = \begin{cases} e^{At}B(\tau), & t \le \tau, \\ e^{At}(B(\tau) + e^{-A\tau}), & \tau < t, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix}, & t \le \tau \\ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) + \cos\tau & b_{12}(\tau) - \sin\tau \\ b_{21}(\tau) + \sin\tau & b_{22}(\tau) + \cos\tau \end{pmatrix}, & \tau < t. \end{cases}$$

Найдем теперь частное решение. Так как $B(\tau)$ – произвольная матрица, положим, например, $B(\tau) = 0$. Тогда

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \le \tau, \\ \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}, & \tau < t. \end{cases}$$

Остается вычислить интеграл

$$x(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau = \int\limits_a^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\tau \end{pmatrix} d\tau = \int\limits_a^t \begin{pmatrix} \sin(t-\tau)\cos\tau \\ \cos(t-\tau)\cos\tau \end{pmatrix} d\tau.$$

Выбрав $a = 0$, получаем

$$x(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

3.3. Упражнения для самостоятельного решения

Найти функцию Грина и с ее помощью частное решение следующих систем:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 2e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - 3e^{4t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 1/t^2 + \ln t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 3e^{2t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - e^{2t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 + 1/t - 4\ln t, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 1/t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + t^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 5\cos t, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 2\sin t, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^t, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 - 8, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 6x_2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 5\sin t. \end{cases}$

4. Краевая задача для системы уравнений

Рассмотрим на $[a, b]$ линейную систему (3.1): $\dot{x} = A(t)x + f(t)$.

4.1. Краевая задача и свойства ее решений

Определение 4.1. *Соотношение* $Mx(a)+Nx(b)=0$, *где* M, N — *постоянные* $(n\times n)$*-матрицы, удовлетворяющие условию* $rank(M, N) = n$, *называется краевыми условиями.*

Определение 4.2. *Задача*

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{4.1}$$

$$Mx(a) + Nx(b) = 0, \tag{4.2}$$

называется однородной краевой задачей, а задача

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{4.3}$$

$$Mx(a) + Nx(b) = 0, \tag{4.4}$$

называется неоднородной краевой задачей.

Лемма 4.1.

а) Если $x_0(t)$ — *решение однородной задачи (4.1)–(4.2),* $x_1(t)$ – *решение неоднородной задачи (4.3)-(4.4), то* $(x_0(t)+x_1(t))$ — *решение неоднородной краевой задачи.*

б) Если $x_1(t)$, $x_2(t)$ – *-решения задачи (4.3)–(4.4), то* $(x_1(t)-x_2(t))$ — *решение однородной краевой задачи.*

Лемма 4.2.

Невырожденность матрицы $V = M\Phi(a) + N\Phi(b)$ *является необходимым и достаточным условием*

1) существования только нулевого решения у однородной краевой задачи;

2) единственности решения неоднородной краевой задачи.

4.2. Функция Грина и решение неоднородной краевой задачи

Определение 4.3. Функцией Грина неоднородной краевой задачи называется функция Грина системы (4.3), удовлетворяющая краевым условиям (4.4), т. е. для которой $MG(a,\tau) + NG(b,\tau) = 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $A(t)$, $f(t)$ – непрерывны на $[a,b]$.*

Тогда:

а) *для существования функции Грина неоднородной краевой задачи (4.3)-(4.4) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\tau \in [a,b]$ была совместной система*

$$VB(\tau) = -N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau), \tag{4.5}$$

т. е. чтобы выполнялось условие

$$rank\ V = rank(V, N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau)), \tag{4.6}$$

где $V = M\Phi(A) + N\Phi(b)$;

б) *для существования и единственности функции Грина неоднородной краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы $rank\ V = n$. В этом случае функция Грина имеет вид*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Phi(t)F\Phi^{-1}(\tau), & t \leq \tau, \\ \Phi(t)(I+F)\Phi^{-1}(\tau), & \tau < t, \end{cases} \tag{4.7}$$

где $F = -V^{-1}N\Phi(b)$;

в) *при непрерывной матрице $B(\tau)$ из (4.5) функция*

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau \tag{4.8}$$

является решением неоднородной краевой задачи (4.3)-(4.4), причем в случае $rank\ V = n$ это решение единственное.

Доказательство. а). В силу теоремы 3.1 любая функция Грина системы

(4.3) имеет вид

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Phi(t)B(\tau), & a \le t \le \tau, \\ \Phi(t)(B(\tau) + \Phi^{-1}(\tau)), & \tau < t \le b, \end{cases} \tag{4.9}$$

где $B(\tau)$ – произвольная определенная на $[a,b]$ $(n{\times}n)$-матрица. Подставим функцию (4.9) в краевые условия (4.4), имеем

$$0 = M\Phi(a)B(\tau) + N\Phi(b)(B(\tau) + \Phi^{-1}(\tau)) = VB(\tau) + N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau),$$

откуда получаем (4.5). Как известно, система (4.5) является совместной тогда и только тогда, когда выполняется условие (4.6).

б). Из (4.5) вытекает, что функция $B(\tau)$ существует и единственна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} V = n$. В этом случае

$$B(\tau) = -V^{-1}N\Phi(b)\Phi^{-1}(\tau) = F\Phi^{-1}(\tau).$$

Таким образом, подставив выражение для $B(\tau)$ в (4.9), получаем, что функция Грина неоднородной краевой задачи существует, единственна и имеет вид (4.7).

в). В силу теоремы 3.1 функция (4.8) является решением системы (4.3). Чтобы убедиться, что эта функция удовлетворяет краевым условиям, подставим ее в левую часть краевых условий (4.2). Имеем

$$Mx(a) + Nx(b) = \int\limits_a^b (MG(a,\tau) + NG(b,\tau))f(\tau)d\tau = 0.$$

В силу леммы 4.2 функция (4.8) будет единственным решением краевой задачи при условии $\operatorname{rank} V = n$.

4.3. Пример

Построив функцию Грина, решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \cos t, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Решение. В данной задаче

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$V = M\Phi(0) + N\Phi(\pi/2) = I, \quad V^{-1} = I.$$

$$F = -V^{-1}N\Phi(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I + F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t)F\Phi^{-1}(\tau) = -\begin{pmatrix} \sin t \sin \tau & \sin t \cos \tau \\ \cos t \sin \tau & \cos t \cos \tau \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t)(I+F)\Phi^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos t \cos \tau & -\cos t \sin \tau \\ -\sin t \cos \tau & \sin t \sin \tau \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функция Грина имеет вид

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -\begin{pmatrix} \sin t \sin \tau & \sin t \cos \tau \\ \cos t \sin \tau & \cos t \cos \tau \end{pmatrix}, & 0 \le t \le \tau, \\ \begin{pmatrix} \cos t \cos \tau & -\cos t \sin \tau \\ -\sin t \cos \tau & \sin t \sin \tau \end{pmatrix}, & \tau < t \le \pi/2. \end{cases}$$

Искомое решение

$$x(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(t,\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \tau \end{pmatrix} d\tau = \int\limits_0^{t} \begin{pmatrix} \cos t \cos \tau & -\cos t \sin \tau \\ -\sin t \cos \tau & \sin t \sin \tau \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \tau \end{pmatrix} d\tau - \int\limits_t^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \sin \tau & \sin t \cos \tau \\ \cos t \sin \tau & \cos t \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \tau \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t - \pi/2) \sin t \\ \sin t + (t - \pi/2) \cos t \end{pmatrix}.$$

4.4. Упражнения для самостоятельного решения

1. Доказать лемму 4.1.

2. Доказать лемму 4.2.

3. Построить функцию Грина для следующих краевых задач:

3.1. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(t), \\ x_1(0) + x_1(1) = 0, \\ x_2(0) + x_2(1) = 0; \end{cases}$$

3.3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + f(t), \\ x_1(-1) = x_1(1), \\ x_2(-1) = x_2(1); \end{cases}$$

3.2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + f(t), \\ x_1(0) = 0, \\ x_1(1) = 0. \end{cases}$$

3.4. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + f(t), \\ x_1(0) + x_1(1) = 0, \\ x_2(0) + x_2(1) = 0; \end{cases}$$

4. Используя функцию Грина, найти решение следующих краевых задач:

4.1. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + t, \\ x_2(0) = 0, \\ x_1(2) + x_2(2) = 0. \end{cases}$$

4.4. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \sin t, \\ x_1(0) - x_1(\pi) = 0, \\ x_2(0) - x_2(\pi) = 0. \end{cases}$$

4.2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + t^2, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(1) = 0. \end{cases}$$

4.5. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 5\cos t, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2, \\ x_1(0) + x_1(1) = 0, \\ x_2(0) + x_2(1) = 0. \end{cases}$$

4.3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \cos t, \\ x_1(0) = 0, \\ x_1(1) = 0. \end{cases}$$

4.6. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + t^2, \\ x_1(0) + x_1(1) = 0, \\ x_2(0) + x_2(1) = 0; \end{cases}$$

Заключение

В данном методическом пособии впервые в мировой литературе введены понятия функций Грина линейного дифференциального уравнения и системы уравнений. Приведены необходимые и достаточные условия существования функций Грина, дано их аналитическое представление через фундаментальную систему решений и установлена их связь с решениями неоднородного уравнения и неоднородной системы.

На базе введенной функции Грина дифференциального уравнения определяется функция Грина краевой задачи. Приведены необходимые и достаточные условия существования и единственности функции Грина краевой задачи и дается ее аналитическое представление через фундаментальную систему решений и краевые условия. При таком подходе отпадает необходимость привлечения функций влияния, δ-функций, проекторов.

Список использованной литературы

1. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высш. шк., 1991. – 303 с.
2. Валеев К. Г. Построение функций Ляпунова / К. Г. Валеев, Г. С. Финин. – К. : Наук. думка, 1981. – 412 с.
3. Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1958. – 474 с.
4. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений / П. И. Лизоркин. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
5. Диференщальні рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. – К. : Вища школа, 1981. – 504 с.
6. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1980. – 352 с.

Навчальне видання

Луценко Анатолій Васильович
Скорик Василь Олександрович

Функція Гріна та її застосування

Методичний посібник
до курсу ≪Диференціальні рівняння≫
(Рос. мовою)

Коректор *Ю. В. Лєонт'єва*
Комп'ютерне верстання *В. О. Скорик*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 1,0.
Тираж 50 пр. Замовлення № 235/13.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009.
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32
