Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

А. С. Сохин, В. А. Скорик

Численное решение граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Методическое пособие
курса ≪Методы вычислений≫

Харьков – 2013

УДК 519.624(075.8)
ББК 22.193я73
С 68

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом радиофизической интроскопии ИРЭ НАН Украины **Масалов С. А.**;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и программного обеспечения Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **Приходько А. П.**

Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 3 от 19.12.2013)

С 68 **Сохин А. С.** Численное решение граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : методическое пособие курса ≪Методы вычислений≫ / А. С. Сохин, В. А. Скорик. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. – 28 с.

Данное пособие посвящено решению граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом сеток и методом Галеркина. Пособие будет полезным студентам при изучении соответствующих разделов курса ≪Методы вычислений≫ как в теоретическом, так и в практическом плане.

УДК 519.624(075.8)
ББК 22.193я73

Содержание

Введение

Данное пособие посвящено решению граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом сеток и методом Галеркина. В первой части рассматривается применение сеточных аппроксимационных методов численного решения граничной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Построение абстрактной схемы сеточной аппроксимации иллюстрируется структурными схемами-шаблонами и анализом погрешностей аппроксимации. Изучаются свойства разрешимости, устойчивости и сходимости. Для численной реализации представляется метод прогонки. Во второй части приводятся проекционные методы решения граничной задачи на основе метода Галеркина в случае конечных элементов и линейных базисных сплайнов.

Рассмотрим граничную задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b, \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} l_0 y &\equiv \ell_0 y(a) + r_0 y'(a) = \gamma_0, \\ l_1 y &\equiv \ell_1 y(b) + r_1 y'(b) = \gamma_1, \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $p(x), q(x), f(x) \in \mathrm{C}^2[a,b]$ — заданные функции, $q(x) \le 0$ на $[a,b]$, ℓ_0, ℓ_1, r_0, r_1, γ_0, γ_1 — заданные числа, некоторые из которых могут быть равны нулю, причем $|\ell_i| + |r_i| \neq 0$, $i = 0, 1$.

Определение 0.1. Соответствующее граничное условие из (0.2) называется условием первого рода (условие Дирихле), если $r_0 = 0$, $r_1 = 0$; условием второго рода (условие Неймана), если $\ell_0 = 0$, $\ell_1 = 0$; условием третьего рода (смешанное условие), если ℓ_i и r_i $(i = 0, 1)$ одновременно отличны от нуля.

В отличие от задачи Коши, граничная задача может не иметь решения, иметь не единственное решение, иметь единственное решение.

Теорема 0.1. *Пусть в уравнении (0.1)* $p(x), q(x), f(x) \in \mathrm{C}^2[a,b]$, *причем* $q(x) \leq 0$ *на* $[a,b]$, *и в граничных условиях (0.2)* $\ell_1 \geq 0$, $r_1 \geq 0$, $\ell_1 + r_1 > 0$, $r_0/\ell_0 \leq 0$.

Тогда граничная задача (0.1), (0.2) имеет единственное решение $y(x) \in \mathrm{C}^4[a,b]$.

1. Метод сеток

Рассмотрим задачу решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (0.1) при одном из граничных условий в граничных точках a и b:

$$y(a) = m_0, \quad y(b) = m_1 \qquad \text{(условие Дирихле)} \tag{1.1}$$

$$y'(a) = m_0, \quad y'(b) = m_1 \qquad \text{(условие Неймана)} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} l_0 y \equiv -y'(a) + \mu_0 y(a) = m_0, \\ l_1 y \equiv y'(b) + \mu_1 y(b) = m_1. \end{cases} \qquad \text{(условие Робена)} \tag{1.3}$$

Функция $f(x)$ и числа m_0, m_1 называются входными данными. Если входные данные равны нулю, то решение граничной задачи тождественно равно нулю. В разных точках границы могут быть граничные условия любого из трех видов. В уравнении (0.1) считаем функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ достаточно гладкими функциями на $[a,b]$, а функцию $q(x) \leq 0$, $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$. Если $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$, то $q(x) \leq 0$ и $q(x) \not\equiv 0$.

При решении граничных задач методом сеток возникают следующие вопросы:

1) составление сеточной (разностной) системы линейных алгебраических уравнений (дискретизация задачи);

2) аппроксимация разностной задачи дифференциальной задачей;

3) рациональные методы решения сеточной задачи;

4) оценка решения сеточной задачи через входные данные (устойчивость);

5) сходимость решения сеточной задачи к решению дифференциальной задачи.

1.1. Сетки и сеточные функции

Зададим на отрезке $[a,b]$ конечное множество точек (узлов) $\overline{\omega}_h = \{x_i:\ x_i = a + ih,\ i = 0,\dots,n\}$, где $h = (b-a)/n$, $n \geq 2$ — натуральное число.

Определение 1.1. Множество $\overline{\omega}_h$ называется сеткой, h — шагом сетки.

Обозначим через $\omega_h = \{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ — множество *внутренних узлов*, $\partial\omega_h = \{x_0, x_n\}$ — множество граничных узлов. Таким образом, $\overline{\omega}_h = \omega_h \bigcup \partial\omega_h$.

Определение 1.2. Функция u, областью определения которой является какая-либо сетка $\overline{\omega}_h$ или ω_h, или $\partial\omega_h$, называется сеточной.

Значение сеточной функции u в i-том узле будем обозначать u_i. Функция y, определенная на всем отрезке $[a,b]$, порождает сеточную функцию, принимающую в узле x_i значение, равное $y(x_i)$, которое будем обозначать y_i, $i = 1,\dots,n$.

Обозначим через $Y_{\overline{\omega}_h}$, Y_{ω_h}, $Y_{\partial\omega_h}$ множества всех сеточных функций, определенных, соответственно, на $\overline{\omega}_h$, ω_h, $\partial\omega_h$. Множества $Y_{\overline{\omega}_h}$, Y_{ω_h}, $Y_{\partial\omega_h}$ являются линейными пространствами, в которых зададим соответственно нормы

$$\|y\|_{\overline{\omega}_h} = \max_{0\leq i\leq n} |y_i|, \quad \|y\|_{\omega_h} = \max_{1\leq i\leq n-1} |y_i|, \quad \|y\|_{\partial\omega_h} = \max\{|y_0|, |y_n|\}.$$

Определение 1.3. Оператор $L_h y$ называется разностным, если он каждой сеточной функции $y \in Y_{\overline{\omega}_h}$ ставит в соответствие некоторую сеточную функцию, принадлежащую Y_{ω_h} (или $Y_{\partial\omega_h}$).

Аппроксимируем заданную на отрезке дифференциальную граничную задачу (0.1), (1.3) некоторой разностной граничной задачей, в которой искомой является сеточная функция на сетке ω_h. Для этого:

1. Построим некоторые разностные операторы, аппроксимирующие дифференциальный оператор Ly и граничный оператор ly.
2. Составим на сетке $\overline{\omega}_h$ разностную краевую задачу, которую называют *разностной схемой* для дифференциальной задачи (0.1), (1.3).

3. Покажем, что полученная разностная схема аппроксимирует исходную граничную задачу (0.1), (1.3).
4. Исследуем устойчивость разностной схемы и сходимость ее решения к решению дифференциальной задачи при стремлении шага сетки к нулю.
5. Приведем достаточно эффективный на практике численный метод решения разностной задачи.

1.2. Аппроксимация дифференциальных операторов разностными

Рассмотрим граничную задачу (0.1), (1.3). Чтобы составить сеточную систему уравнений нужно уметь аппроксимировать производные во внутренних узлах сетки и в узлах границы сетки разностными отношениями.

Определение 1.4. Разностный оператор $D_h y$ аппроксимирует дифференциальный оператор Dy с порядком $k > 0$ относительно шага h в сеточной норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, если для любой достаточно гладкой функции y выполняется неравенство $\|Dy - D_h y\|_{\omega_h} \le c_y h^k$, где c_y — некоторая не зависящая от h постоянная.

Обозначим через y_i, y'_i, p_i, q_i, f_i значения функций $y(x)$, $y'(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ в узлах x_i сетки $\overline{\omega}_h$, первые *разностные правую* y_x и *левую* $y_{\overline{x}}$ *производные* функции y определим соотношениями

$$\begin{aligned} (y_x)_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ (y_{\overline{x}})_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Пусть $y \in C^2_{[a,b]}$. Тогда разностные производные y_x, $y_{\overline{x}}$, определяемые соотношениями (1.4), аппроксимируют производную (дифференциальный оператор) первого порядка y' с первым порядком относительно шага h в сеточной норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, т. е.*

$$\|y' - y_x\|_{\omega_h} \le \frac{1}{2}\|y''\|_{C_{[a,b]}} h, \quad \|y' - y_{\overline{x}}\|_{\omega_h} \le \frac{1}{2}\|y''\|_{C_{[a,b]}} h. \tag{1.5}$$

Доказательство. Найдем с какой погрешностью, выражаемой через степени шага $h,$ эти разностные производные приближают производную $y'(x)$ функции $y(x)$ в точке $x = x_i$. Имеем

$$(y_x)_i = y'_i + \frac{h}{2}y''(\theta_i^+), \quad x_i < \theta_i^+ < x_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{1.6}$$

$$(y_{\overline{x}})_i = y'_i - \frac{h}{2}y''(\theta_i^-), \quad x_{i-1} < (\theta_i^-) < x_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Следовательно,

$$|(y_x)_i - y'_i| \le \frac{h}{2}\|y''\|_{C_{[a,b]}}, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$
$$|(y_{\overline{x}})_i - y'_i| \le \frac{h}{2}\|y''\|_{C_{[a,b]}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

т. е. разностные производные $(y_x)_i$, $(y_{\overline{x}})_i$ аппроксимируют первую производную $y'(x)$ в точке x_i с погрешностью $O(h)$.

Отсюда вытекает неравенства (1.5), т. е. эта аппроксимация *первого порядка* относительно шага h.

Лемма 1.2. *Пусть $y \in C^3_{[a,b]}$. Тогда разностная центральная производная $y_{\overset{\circ}{x}}$, определяемая в узле x_i соотношением*

$$\left(y_{\overset{\circ}{x}}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.8}$$

аппроксимируют производную (дифференциальный оператор) первого порядка y' со вторым порядком относительно шага h в сеточной норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, т. е.

$$\|y' - y_{\overset{\circ}{x}}\|_{\omega_h} \le \frac{1}{6}\|y'''\|_{C_{[a,b]}}h^2. \tag{1.9}$$

Доказательство. В силу предположений леммы имеем :

$$\begin{aligned} (y_x)_i &= y'_i + \frac{h}{2}y''_i + \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i^+),\ x_i<\xi_i^+<x_{i+1},\ i=0,...,n-1, \\ (y_{\overline{x}})_i &= y'_i - \frac{h}{2}y''_i + \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i^-),\ x_{i-1}<\xi_i^-<x_i,\ i=1,...,n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Аппроксимируем в точке $x = x_i$ производную y'_i выражением $c_1(y_x)_i + c_2(y_{\overline{x}})_i$ и определим постоянные c_1, c_2 из условия стремления к нулю погрешности аппроксимации $\varepsilon_i(h)$ при $h \to 0$, т. е. из условия

$$\varepsilon_i(h) = c_1(y_x)_i + c_2(y_{\overline{x}})_i - y'_i \to 0 \text{ при } h \to 0,\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.11}$$

Поскольку в силу равенств (1.10) имеем

$$\varepsilon_i(h) = (c_1{+}c_2{-}1)y_i' + \frac{1}{2}(c_1{-}c_2)hy_i'' + \frac{h^2}{6}\left(c_1 y_i'''(\xi_i^+) + c_2 y'''(\xi_i^-)\right),$$

то из условия (1.11) получаем равенства $c_1 + c_2 - 1 = 0$, $c_1 - c_2 = 0$, из которых находим $c_1 = c_2 = 1/2$. Тогда

$$\varepsilon_i(h) = \frac{1}{2}(y_x)_i + \frac{1}{2}(y_{\overline{x}})_i - y_i' = \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i^\pm), \quad x_{i-1} < \xi_i^\pm < x_{i+1},$$

и, следовательно,

$$(y_{\overset{\circ}{x}})_i - y_i' = \frac{1}{2}(y_x + y_{\overline{x}}) - y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - y_i' = \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i^\pm).$$

Отсюда получаем

$$|(y_{\overset{\circ}{x}})_i - y_i'| \le \frac{1}{6}M_{3,i}h^2, \quad i = 1, \ldots, n{-}1, \tag{1.12}$$

где $M_{3,i} = \max\limits_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |y'''(x)|$, т. е. *разностная центральная* производная $y_{\overset{\circ}{x}}$ аппроксимирует первую производную функции $y(x)$ в узле x_i с погрешностью второго порядка относительно шага h. Из (1.12) следует неравенство (1.9).

Получим аппроксимацию второго порядка относительно шага h второй производной функции $y(x)$.

Лемма 1.3. *Пусть $y \in C^4_{[a,b]}$. Тогда разностная производная $y_{x\overline{x}}$ (или $y_{\overline{x}x}$), определяемая в узле x_i соотношением*

$$(y_{x\overline{x}})_i = (y_{\overline{x}x})_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, n{-}1, \tag{1.13}$$

аппроксимируют производную (дифференциальный оператор) второго порядка y'' со вторым порядком относительно шага h в сеточной норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, т. е.

$$\|y'' - y_{x\overline{x}}\|_{\omega_h} \le \frac{1}{12}\|y^{\mathrm{IV}}\|_{C_{[a,b]}}h^2. \tag{1.14}$$

Доказательство. Будем искать y_i'' в виде $c_1(y_x)_i + c_2(y_{\overline{x}})_i$ и определим постоянные c_1, c_2 из условия стремления к нулю погрешности аппроксимации $\varepsilon_i^{(2)}(h)$ при $h \to 0$ для любого $i = 1, \ldots, n{-}1$, т. е. из условия

$$\varepsilon_i^{(2)}(h) = c_1(y_x)_i + c_2(y_{\overline{x}})_i - y_i'' \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{1.15}$$

Поскольку для $y \in C^4_{[a,b]}$ погрешность аппроксимации имеет вид :

$$\varepsilon_i^{(2)}(h) = (c_1{+}c_2)y_i' + \frac{1}{2}\left(c_1h - c_2h - 2\right)y_i'' + (c_1 + c_2)\frac{h^2}{6}y_i'''+$$

$$+\frac{h^3}{24}\left(c_1 y^{\mathrm{IV}}(\theta_i^+) + c_2 y^{\mathrm{IV}}(\theta_i^-)\right), \quad x_i < \theta_i^+ < x_{i+1},\ x_{i-1} < \theta_i^- < x_i,$$

то отсюда, согласно условию (1.15), получаем равенства $c_1 + c_2 = 0$, $c_1h - c_2h - 2 = 0$, из которых имеем $c_1 = 1/h$, $c_2 = -1/h$. Поэтому

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^{(2)}(h) &= \tfrac{1}{h}\left((y_x)_i - (y_{\overline{x}})_i\right) - y_i'' = (y_{x\overline{x}})_i - y_i'' = \\ &= (y_{\overline{x}x})_i - y_i'' = \tfrac{h^2}{12}y^{\mathrm{IV}}(\theta_i^{\pm}),\ x_{i-1} < \theta_i^{\pm} < x_{i+1},\ i{=}1,\ldots,n{-}1,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon_i^{(2)}(h)| = |(y_{x\overline{x}})_i - y_i''| \le \tfrac{1}{12}\|y^{\mathrm{IV}}\|_{C_{[a,b]}}h^2, \quad i = 1,\ldots,n{-}1.$$

Отсюда вытекает неравенство (1.14).

Определение 1.5. Назовем шаблоном множество точек сетки, используемое для аппроксимации производной в фиксированной точке разностным отношением.

Шаблоны для $(y_x)_i$, $(y_{\overline{x}})_i$, $(y_{\overset{\circ}{x}})_i$, $(y_{x\overline{x}})_i$, соответственно, имеют вид :

●——○ ,   ○——● ,   ○——●——○ ,   ○——●——○ .

где символом ≪ • ≫ изображается точка сетки, в которой аппроксимируются производные линейной комбинацией значений функции в точках шаблона.

Найдем аппроксимации производных со вторым порядком относительно шага h в граничных условиях (1.2) и (1.3).

Лемма 1.4. *Пусть $y \in C^3_{[x_0,x_1]\cup[x_{n-1},x_n]}$ и удовлетворяет равенству (0.1) в точках $x = a$ и $x = b$. Тогда разностный оператор первого порядка, задаваемая при $x = a$ и $x = b$, соответственно, выражениями*

$$\begin{aligned}\gamma_{1,h}y &= \left(1 + \tfrac{h}{2}p_0\right)(y_x)_0 + \tfrac{h}{2}q_0y_0 - \tfrac{h}{2}f_0,\\ \gamma_{2,h}y &= \left(1 - \tfrac{h}{2}p_n\right)(y_{\overline{x}})_n - \tfrac{h}{2}q_ny_n + \tfrac{h}{2}f_n,\end{aligned} \tag{1.16}$$

аппроксимируют производную (дифференциальный оператор) первого порядка функции $y(x)$ со вторым порядком относительно шага h в се-

точной норме $\|\cdot\|_{\partial\omega_h}$, *т. е.*

$$\|y' - \gamma_h y\|_{\partial\omega_h} \le \max\{c_0, c_n\}h^2, \quad \gamma_h y = \begin{cases} \gamma_{1,h}y & \textit{при} \;\; x = a, \\ \gamma_{2,h}y & \textit{при} \;\; x = b, \end{cases} \tag{1.17}$$

где постоянные c_0, c_n *имеют вид :*

$$c_0 = \tfrac{1}{4}|p_0| \max_{x\in[x_0,x_1]} |y''(x)| + \tfrac{1}{6} \max_{x\in[x_0,x_1]} |y'''(x)|,$$
$$c_n = \tfrac{1}{4}|p_n| \max_{x\in[x_{n-1},x_n]} |y''(x)| + \tfrac{1}{6} \max_{x\in[x_{n-1},x_n]} |y'''(x)|.$$

Доказательство. Из равенств (1.10) при $i = 0$ и $i = n$ имеем :

$$\begin{aligned} (y_x)_0 &= y_0' + \frac{h}{2}y_0'' + \frac{h^2}{6}y'''(\xi_0^+), \quad x_0 < \xi_0^+ < x_1, \\ (y_{\overline{x}})_n &= y_n' - \frac{h}{2}y_n'' + \frac{h^2}{6}y'''(\xi_n^-), \quad x_{n-1} < \xi_n^- < x_n. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Принимая во внимание, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (0.1) при $x = a$ и $x = b$, имеем равенства

$$y_0'' = f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0, \quad y_n'' = f_n - p_n y_n' - q_n y_n,$$

которые с учетом равенства (1.6) при $i = 0$ и равенства (1.7) при $i = n$ перепишем в виде

$$y_0'' = f_0 - p_0\left[(y_x)_0 - \tfrac{h}{2}y''(\theta_0^+)\right] - q_0 y_0, \quad x_0 < \theta_0^+ < x_1,$$

$$y_n'' = f_n - p_n\left[(y_{\overline{x}})_n - \tfrac{h}{2}y''(\theta_n^-)\right] - q_n y_n, \quad x_{n-1} < \theta_n^- < x_n.$$

Тогда из (1.18) получаем равенства

$$y_0' = \left(1 + \tfrac{h}{2}p_0\right)(y_x)_0 + \tfrac{h}{2}q_0 y_0 - \tfrac{h}{2}f_0 - \tfrac{h^2}{4}p_0 y''(\theta_0^+) - \tfrac{h^2}{6}y'''(\xi_0^+),$$

$$y_n' = \left(1 - \tfrac{h}{2}p_n\right)(y_{\overline{x}})_n - \tfrac{h}{2}q_n y_n + \tfrac{h}{2}f_n + \tfrac{h^2}{4}p_n y''(\theta_n^-) - \tfrac{h^2}{6}y'''(\xi_n^-),$$

где $x_0 < \xi_0^+, \theta_0^+ < x_1$, $x_{n-1} < \xi_n^-, \theta_n^- < x_n$. Из этих равенств имеем :

$$\left|y_0' - \left[\left(1 + \tfrac{h}{2}p_0\right)(y_x)_0 + \tfrac{h}{2}q_0 y_0 - \tfrac{h}{2}f_0\right]\right| \le c_0 h^2,$$

$$\left|y_n' - \left[\left(1 - \tfrac{h}{2}p_n\right)(y_{\overline{x}})_n - \tfrac{h}{2}q_n y_n + \tfrac{h}{2}f_n\right]\right| \le c_n h^2.$$

Отсюда, в силу (1.16) и определения нормы $\|\cdot\|_{\partial\omega_h}$, получаем неравенство (1.17).

1.3. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной

Аппроксимируем дифференциальный оператор Ly на сетке ω_h разностным оператором $L_h y$, получаемым путем замены в узлах сетки ω_h производных y'', y' разностными производными $y_{x\overline{x}}$, $y_{\overset{\circ}{x}}$ по формулам (1.13), (1.8). Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n{-}1$ имеем

$$(Ly)_i \equiv \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i + O_i(h^2), \tag{1.19}$$

где $O_i(h^2) = h^2 y^{\mathrm{IV}}(\theta_i^{\pm})/12 + p_i h^2 y'''(\xi_i^{\pm})/6,\ x_{i-1} < \theta_i^{\pm}, \xi_i^{\pm} < x_{i+1}$. Заменяя в узлах сетки $\partial\omega_h$ производные y_0', y_n' разностными производными $\gamma_{1,h}y$, $\gamma_{2,h}y$ по формулам (1.16), имеем :

$$l_0 y \equiv -(1+\frac{h}{2}p_0)\frac{y_1-y_0}{h} + (\mu_0 - \frac{h}{2}q_0)y_0 + \frac{h}{2}f_0 = m_0 + O_0(h^2), \tag{1.20}$$

$$ly \equiv (1-\frac{h}{2}p_n)\frac{y_n-y_{n-1}}{h} + (\mu_1 - \frac{h}{2}q_n)y_n + \frac{h}{2}f_n = m_1 + O_n(h^2), \tag{1.21}$$

где $O_0(h^2) = h^2 p_0 y''(\theta_0^+)/4 + h^2 y'''(\xi_0^+)/6,\ \ x_0 < \theta_0^+, \xi_0^+ < x_1, \quad O_n(h^2) = -h^2 p_n y''(\theta_n^-)/4 + h^2 y'''(\xi_n^-)/6,\ x_{n-1} < \theta_n^-, \xi_n^- < x_n.$

Р а з н о с т н ы е с х е м ы. Отбрасывая в равенствах (1.19)–(1.21) величины $O_0(h^2)$, $O_1(h^2)$, $\ldots$, $O_n(h^2)$, получаем сеточную разностную задачу

$$(L_h u)_i \equiv \frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i,\ i = \overline{1, n{-}1}, \tag{1.22}$$

$$l_{0,h} u \equiv -(1+\frac{h}{2}p_0)\frac{u_1-u_0}{h} + (\mu_0 - \frac{h}{2}q_0)u_0 + \frac{hf_0}{2} = m_0, \tag{1.23}$$

$$l_{1,h} u \equiv (1-\frac{h}{2}p_n)\frac{u_n-u_{n-1}}{h} + (\mu_1 - \frac{h}{2}q_n)u_n + \frac{hf_n}{2} = m_1, \tag{1.24}$$

которую с учетом обозначений для разностных производных запишем в виде

$$\begin{cases} L_h u \equiv u_{x\overline{x}} + p u_{\overset{\circ}{x}} + qu = f, & (1.25) \\ \\ l_{0,h} u \equiv -(1+\frac{h}{2}p_0)\,(u_x)_0 + (\mu_0 - \frac{h}{2}q_0)u_0 + \frac{h}{2}f_0 = m_0, & (1.26) \\ l_{1,h} u \equiv (1-\frac{h}{2}p_n)\,(u_{\overline{x}})_n + (\mu_1 - \frac{h}{2}q_n)u_n + \frac{h}{2}f_n = m_1. & (1.27) \end{cases}$$

Составим следующую разностную граничную задачу (точнее, семейство разностных граничных задач, зависящее от параметра h)

$$L_h u = f, \tag{1.28}$$

$$l_h u = m, \tag{1.29}$$

где $L_h u$ — разностный оператор, определенный по формуле (1.25), $l_h u$ — разностный оператор, задаваемый соотношением

$$l_h u = \begin{cases} l_{0,h} u, & x = a, \\ l_{1,h} u, & x = b, \end{cases} \qquad m = \begin{cases} m_0, & x = a, \\ m_1, & x = b, \end{cases}$$

$f \in Y_{\omega_h}$ — сеточная функция, порождаемая правой частью уравнения (0.1), $m \in Y_{\partial\omega_h}$ — заданная сеточная функция со значениями $m_0 = m_0$, $m_n = m_1$.

Разностная граничная задача (1.28), (1.29) называется *разностной схемой* для дифференциальной граничной задачи (0.1), (1.3).

Определение 1.6. Назовем погрешностью аппроксимации дифференциальной задачи (0.1), (1.3) разностной задачей (1.28), (1.29) норму разности между правыми и левыми частями равенств (1.28), (1.29) на решении дифференциальной задачи $y(x)$ на сетке $\overline{\omega}_h$.

Определение 1.7. Если погрешности аппроксимации дифференциального уравнения и граничных условий разностными стремятся к нулю при $h \to 0$ как h^k, то имеет место аппроксимация дифференциальной задачи разностной задачей k-го порядка относительно шага h.

Теорема 1.1. *Пусть в уравнении (0.1) $p(x), q(x), f(x) \in \mathrm{C}^2[a, b]$, причем $q(x) \le 0$ на $[a, b]$, и в граничных условиях (1.3) $\mu_0 \ge 0$, $\mu_1 \ge 0$ (если $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$, то $q(x) \le 0$ и $q(x) \not\equiv 0$.*

Тогда разностная задача (1.25)–(1.27) аппроксимирует граничную дифференциальную задачу (0.1), (1.3) со вторым порядком относительно шага h.

Доказательство. В силу предположений данной теоремы по теореме 0.1 граничная дифференциальная задача (0.1),(1.3) имеет единственное решение $y \in \mathrm{C}^4[a,b]$. Поскольку в силу равенства (0.1) имеем

$$\|L_h y - f\|_{\omega_h} = \|L_h y - Ly\|_{\omega_h} \le \|y_{x\bar{x}} - y''\|_{\omega_h} + \|p\|_{C[a,b]}\|y_{\overset{\circ}{x}} - y'\|_{\omega_h},$$

то отсюда в силу лемм 1.2, 1.3 получаем

$$\|L_h y - f\|_{\omega_h} = \|L_h y - Ly\|_{\omega_h} \le c_y h^2, \tag{1.30}$$

где $c_y = \max\left\{\|p\|_{C_{[a,b]}}\|y'''\|_{C_{[a,b]}}/6,\ \|y^{\mathrm{IV}}\|_{C_{[a,b]}}/12\right\}$, т. е. разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L со вторым порядком относительно шага h в сеточной норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$. Поскольку в силу равенств (1.3) на основании леммы 1.4 имеем

$$\|l_h y - m\|_{\partial\omega_h} = \|l_h y - ly\|_{\partial\omega_h} = \|\gamma_h y - y'\|_{\partial\omega_h} \le \max\{c_0, c_n\}h^2, \tag{1.31}$$

то разностный оператор l_h аппроксимирует дифференциальный оператор l со вторым порядком относительно шага h в сеточной норме $\|\cdot\|_{\partial\omega_h}$. Из неравенств (1.30), (1.31) согласно определению 1.6 следует утверждение теоремы.

Каноническая форма. Запишем разностную задачу в канонической форме. Для этого умножим равенства (1.22) на h^2, а равенства (1.23) и (1.24) на $2h$. После приведения подобных членов получаем

$$\begin{cases} u_0 = k_0 u_1 + n_0, \\ a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = g_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ u_n = k_1 u_{n-1} + n_1, \end{cases} \tag{1.32}$$

где

$$k_0 = (2+hp_0)/d_0,\ \ n_0 = (2hm_0 - h^2 f_0)/d_0,\ \ d_0 = 2+hp_0+2h\mu_0-h^2q_0;$$
$$a_i = 1-hp_i/2,\ \ b_i = -2+h^2q_i,\ \ c_i = 1+hp_i/2,\ \ g_i = h^2 f_i,\ \ i=1,...,n-1;$$
$$k_1 = (2-hp_n)/d_1,\ \ n_1 = (2hm_1 - h^2 f_n)/d_1,\ \ d_1 = 2-hp_n+2h\mu_1-h^2q_n.$$

1.4. Разрешимость разностной задачи. Метод прогонки

Будем считать, что условия исходной задачи и шаг таковы, что $a_i > 0$, $c_i > 0$, а, следовательно

$$0 < k_0 \le 1, \quad 0 < k_1 \le 1, \quad k_0 + k_1 < 2. \tag{1.33}$$

Из последнего неравенства вытекает, что если $k_0 = 1$, то $k_1 < 1$ и если $k_1 = 1$, то $k_0 < 1$.

Нетрудно видеть, что при достаточно малом шаге h коэффициенты системы уравнений (1.32) удовлетворяют условиям

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \;\; a_i > 0, \;\; b_i > 0, \;\; i = 1, \ldots, n{-}1; \;\; |k_0| \leq 1, \;\; |k_1| \leq 1.$$

Будем искать решение задачи (1.32) в виде

$$u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i \tag{1.34}$$

с подлежащими отысканию прогоночными коэффициентами α_i, β_i. Выражение $u_{i-1} = \alpha_{i-1} u_i + \beta_{i-1}$ подставим в уравнения (1.32) для $i = 1, \ldots, n{-}1$, имеем $(a_i \alpha_{i-1} + b_i) u_i + a_i \beta_{i-1} + c_i u_{i+1} = g_i$. Заменив u_i в последнем равенстве, воспользовавшись соотношением (1.34), получаем

$$\left[(a_i \alpha_{i-1} + b_i)\alpha_i + c_i\right] u_{i+1} + \left[a_i \beta_{i-1} + (a_i \alpha_{i-1} + b_i)\beta_i - g_i\right] = 0.$$

Последнее уравнение выполнимо для любых u_{i+1}, если коэффициенты равны нулю, т. е.

$$(a_i \alpha_{i-1} + b_i)\alpha_i + c_i = 0, \qquad a_i \beta_{i-1} + (a_i \alpha_{i-1} + b_i)\beta_i - g_i = 0.$$

Отсюда получаем рекуррентные соотношения

$$\alpha_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{g_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n{-}1.$$

Полагая в (1.34) $i = 0$, в силу первого равенства из (1.32) находим начальные значения α_0 и β_0 для последовательностей α_i и β_i:

$$u_0 = \alpha_0 u_1 + \beta_0 \equiv k_0 u_1 + n_0; \quad \text{т. е.} \quad \alpha_0 = k_0, \quad \beta_0 = n_0.$$

Равенство (1.34) позволяет, отправляясь от u_n, найти все значения u_{n-1}, $\ldots$, u_0, после того, как найдены коэффициенты α_i и β_i. Из системы уравнений $u_{n-1} = \alpha_{n-1} u_n + \beta_{n-1}$, $u_n = k_1 u_{n-1} + n_1$ находим значение u_n, а именно, $u_n = (n_1 + k_1 \beta_{n-1})/(1 - k_1 \alpha_{n-1})$.

Таким образом, вычислительная схема метода прогонки такова:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = k_0, \quad \beta_0 = n_0,\\
&\alpha_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{g_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n-1, && (1.35)\\
&u_n = \frac{n_1 + k_1\beta_{n-1}}{1 - k_1\alpha_{n-1}}, \quad u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i, \quad i = n-1, \ldots, 0. && (1.36)
\end{aligned}
$$

Покажем, что знаменатели в этих формулах не обращаются в нуль. Установим вначале, что $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, \ldots, n-1$. По условию имеем $|\alpha_0| = |k_0| \leq 1$. Предположим, что $|\alpha_{i-1}| \leq 1$, тогда

$$
\alpha_i = \frac{|c_i|}{|b_i + a_i\alpha_{i-1}|} \leq \frac{|c_i|}{||b_i| - |a_i||\alpha_{i-1}||} = \frac{c_i}{-h^2 q_i + c_i + a_i(1 - \alpha_{i-1})} \leq 1,
$$

т. е. $|\alpha_i| \leq 1$ для любого i. Более того, из условия $|\alpha_{i-1}| < 1$ или из условий $|\alpha_{i-1}| \leq 1$, $|b_i| - |a_i| - |c_i| = h^2(-q_i) > 0$ следует, что знаменатели в формулах (1.35) не равны нулю. Оценим знаменатель в формуле (1.36): $|1 - k_1\alpha_{n-1}| \geq 1 - |k_1||\alpha_{n-1}|$. Из условий (1.33) вытекает, что $|k_0| < 1$ или $|k_1| < 1$. Если $|k_0| < 1$, то $|\alpha_{n-1}| < 1$ и $k_1 \leq 1$, тогда $1 - |k_1||\alpha_{n-1}| > 0$. Если $|k_1| < 1$, то $|k_0| \leq 1$ и $|\alpha_{n-1}| \leq 1$, тогда также $1 - |k_1||\alpha_{n-1}| > 0$.

Заметим, что при решении задачи Неймана имеем $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$. Может оказаться, что и $q_0 = 0$, $q_n = 0$. Тогда будет $k_0 = 1$ и $k_1 = 0$. Так как в этом случае $q_i \leq 0$, $q_i \not\equiv 0$, то, как следует из предыдущих рассуждений, будет $|\alpha_i| < 1$ при некотором $i > 1$, а, следовательно, и $|\alpha_{n-1}| < 1$. Поэтому знаменатель в формуле (1.36) отличен от нуля и при $k_1 = 1$.

Статистически показано, что погрешность в определении решения пропорциональна квадрату количества узлов $\max\limits_i |\Delta u_i| \sim \varepsilon_0 n^2$, где ε_0 — ошибка округления. Отсюда вытекает между точностью ε решения задачи, числом n уравнений и погрешностью округлений ε_0 связь такого вида: $\varepsilon \sim \varepsilon_0 n^2$.

1.5. Устойчивость разностной задачи

Лемма 1.5 (принцип максимума). *Если* $L_h(u) \geq 0$ *на* $\overline{\omega}_h$, $l_{0,h}(u) \leq 0$, $l_{1,h}(u) \leq 0$ *на* $\partial\omega_h$, *то* $u \leq 0$ *на* $\overline{\omega}_h$. *Другими словами, если в задаче (1.25)–(1.26)* $f \geq 0$ *на* $\overline{\omega}_h$, $m_0 \leq 0$, $m_1 \leq 0$, *то решение* $u \leq 0$ *на* $\overline{\omega}_h$.

Доказательство. Введем вспомогательную сеточную функцию $u^\varepsilon = u + \varepsilon v$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а сеточная функция v является решением задачи

$$L_h v = 1 \ \text{на} \ \omega_h, \quad l_{0,h} v = -1, \quad l_{1,h} v = -1. \tag{1.37}$$

При доказательстве подробно остановимся на случаях:

$$1)\ 0 < k_0 < 1, \quad 0 < k_1 \leq 1, \quad q_i \leq 0, \ \ i = 0, \ldots, n;$$

$$2)\ k_0 = 1, \quad k_1 = 1, \quad q_i \leq 0, \ q_i \not\equiv 0, \ \ i = 0, \ldots, n.$$

Рассмотрим случай 1). В канонической форме разностной задачи для функции u^ε имеем :

$$g_i^\varepsilon = h^2(f_i + \varepsilon) > 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.38}$$

$$n_0^\varepsilon = \frac{m_0 - \frac{h}{2}(f_0 + \varepsilon)}{2+hp_0+2h\mu_0-h^2q_0} < 0, \quad n_1^\varepsilon = \frac{m_1 - \frac{h}{2}(f_n + \varepsilon)}{2-hp_n+2h\mu_1-h^2q_n} < 0.$$

Обозначим

$$M = \max_{i=0,\ldots,n} u_i^\varepsilon = u_{i_0}^\varepsilon. \tag{1.39}$$

и рассмотрим возможные случаи :

а) $i_0 = 0$, б) $i_0 = n$, в) $i_0 \in N_{\omega_h} = \{1, \ldots, n-1\}$.

Случай а). Имеем $M = u_0^\varepsilon = k_0 u_1^\varepsilon + n_0^\varepsilon$. Так как $u_1^\varepsilon \leq M$ и $0 < k_0 < 1$, то из предыдущего равенства получаем $M \leq n_0^\varepsilon/(1 - k_0) < 0$. Отсюда в силу (1.39) вытекает, что $u_i^\varepsilon \leq 0$ для всех $i = 0, \ldots, n$.

Случай б). Имеем $M = u_n^\varepsilon = k_1 u_{n-1}^\varepsilon + n_1^\varepsilon$. Поскольку $u_{n-1}^\varepsilon \leq M$ и $0 < k_1 \leq 1$, то $M \leq k_1 M + n_1^\varepsilon$, то есть $(1 - k_1)M \leq n_1^\varepsilon$. Если $0 < k_1 < 1$, то $M \leq n_1^\varepsilon/(1 - k_1) < 0$. Если $k_1 = 1$, то $0 \leq n_1^\varepsilon < 0$, что невозможно. Отсюда следует, что при $k_1 = 1$ максимальное значение $u_{i_0}^\varepsilon$ не достигается при $i_0 = n$.

Случай в). Рассмотрим равенство (1.27) при $i = i_0$, имеем

$$g_{i_0} = a_{i_0} u^{\varepsilon}_{i_0-1} + b_{i_0} u^{\varepsilon}_{i_0} + c_{i_0} u^{\varepsilon}_{i_0+1}. \tag{1.40}$$

Так как $a_{i_0} > 0$, $c_{i_0} > 0$, $u^{\varepsilon}_{i_0 \pm 1} \leq M$ при достаточно малых значениях h, причем $a_{i_0} + b_{i_0} + c_{i_0} = h^2 q_{i_0}$, то из равенства (1.40) получаем

$$g_{i_0} \leq (a_{i_0} + b_{i_0} + c_{i_0}) M.$$

Отсюда, в силу (1.38), имеем : $0 < f_{i_0} + \varepsilon \leq q_{i_0} M$. Если $q_{i_0} < 0$, то $M \leq (f_{i_0} + \varepsilon)/q_{i_0} < 0$. Если $q_{i_0} = 0$, то $0 < f_{i_0} + \varepsilon \leq 0$, что невозможно. Это означает, что максимум сеточной функции u^{ε} не достигается при значении индекса i_0, для которого $q_{i_0} = 0$.

В случае 2), как уже замечено, максимум сеточной функции u^{ε} не достигается при $i_0 = 0$ и $i_0 = n$. Далее повторяем рассуждения в).

Таким образом, доказано, что $u_i + \varepsilon v_i \leq 0$, $i = 0, \ldots, n$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем, что $u_i \leq 0$ для всех $i = 0, \ldots, n$.

ТЕОРЕМА 1.2 (об устойчивости). *Пусть u — сеточная функция, тогда*

$$\|u\|_{\overline{\omega}_h} \leq c \left(|l_{0,h} u| + |l_{1,h} u| + \|L_h u\|_{\omega_h} \right),$$

где c не зависит от h. Другими словами, для решения задачи

$$L_h u = f \ \text{ на } \ \omega_h, \quad l_{0,h} u = m_0, \quad l_{1,h} u = m_n$$

справедливо неравенство $\|u\|_{\overline{\omega}_h} \leq c(\|m\|_{\partial\omega_h} + \|f\|_{\omega_h})$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную сеточную функцию $w = \pm u + (\|f\|_{\omega_h} + \|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h}) v$, где v — решение задачи (1.37). По принципу максимума (лемма 1.5) $v \leq 0$ на $\overline{\omega}_h$.

Установим, какому сеточному уравнению и каким сеточным граничным условиям удовлетворяет функция w. Имеем :

$$L_h w = (\pm f + \|f\|_{\omega_h} + \|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h}) \geq 0 \quad \text{на} \quad \omega_h,$$

$$l_{0,h} w = (\pm \widetilde{m}_0 - \|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h}) - \|f\|_{\omega_h} \leq 0,$$

$$l_{1,h} w = (\pm \widetilde{m}_1 - \|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h}) - \|f\|_{\omega_h} \leq 0.$$

По принципу максимума $\pm u + (\|f\|_{\omega_h} + \|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h})v \le 0$, то есть

$$\pm u_i \le (\|f\|_{\omega_h} + \|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h})(-v_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Найдем равномерную по h оценку функции v. Для этого рассмотрим граничную дифференциальную задачу

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 1 \quad \text{при} \quad a < x < b,$$

$$l_0 z = -z' + \mu_0 z = -1 \ \text{ при } \ x = a, \quad l_1 z = z' + \mu_1 z = -1 \ \text{ при } \ x = b.$$

Нетрудно доказать от противного, что решение $z(x) \le 0$ при $x \in [a, b]$. Для функции z имеем :

$$(L_h z)_i = 1 + O_i(h^2), \quad i = 1, \ldots, n{-}1,$$

$$l_{0,h} z = -1 + O_0(h^2), \quad l_{1,h} z = -1 + O_n(h^2),$$

где $O_i(h^2) \le ch^2$ для $i = 0, \ldots, n$. Рассмотрим разностную задачу

$$L_h\varphi = 1 - ch^2, \quad l_{0,h}\varphi = -1 + ch^2, \quad l_{1,h}\varphi = -1 + ch^2.$$

Очевидно, $v_i = \varphi_i/(1 - ch^2)$. Предположим, что $1 - ch^2 \ge 1/2$. Имеем :

$$\left(L_h(z - \varphi)\right)_i = ch^2 - O_i(h^2) \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n{-}1,$$

$$l_{0,h}(z - \varphi) = O_0(h^2) - ch^2 \le 0, \quad l_{1,h}(z - \varphi) = O_n(h^2) - ch^2 \le 0.$$

По принципу максимума имеем $z_i - \varphi_i \le 0$, $i = 0, \ldots, n$, откуда $-\varphi_i = |\varphi_i| \le -z_i = |z_i|$, $i = 0, \ldots, n$, то есть,

$$-v_i = |v_i| \le \frac{|\varphi_i|}{1 - ch^2} \le \frac{|z_i|}{1 - ch^2} \le 2|z_i| \le 2\|z\|_{\overline{\omega}_h} \le 2\|z\|_{C_{[a,b]}}.$$

Таким образом, получена оценка $\|u\|_{\overline{\omega}_h} \le 2(\|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h} + \|f\|_{\omega_h})$. Уточним эту оценку. Поскольку

$$\|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h} = \max(|\widetilde{m}_0|, |\widetilde{m}_n|) \le \max\left(|m_0| + \frac{h|f_0|}{2}, \ |m_1| + \frac{h|f_n|}{2}\right),$$

то отсюда на основании неравенств

$$\|\widetilde{m}\|_{\partial\omega_h} \le \|m\|_{\partial\omega_h} + \frac{h}{2}\|f\|_{\partial\omega_h}, \quad \frac{h}{2}\|f\|_{\partial\omega_h} + \|f\|_{\omega_h} \le \left(\frac{h}{2} + 1\right)\|f\|_{\overline{\omega}_h},$$

при $h \le 1$ окончательно имеем неравенство

$$\|u\|_{\overline{\omega}_h} \le c(\|m\|_{\partial\omega_h} + \|f\|_{\overline{\omega}_h}); \quad c = 3\|z\|_{C_{[a,b]}}.$$

1.6. Сходимость

Теорема 1.3. *Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость решения сеточной задачи к решению дифференциальной задачи на сетке.*

Доказательство. Пусть y — решение дифференциальной задачи на сетке, u — решение сеточной задачи. Тогда, согласно равенствам (1.19)–(1.21) и (1.25)–(1.27), имеем :

$$\|y-u\|_{\overline{\omega}_h} \le c(|l_{0,h}(y-u)| + |l_{1,h}(y-u)| + \|L_h(y-u)\|_{\omega_h}) =$$

$$= c(c_0h^2 + c_1h^2 + \max_i c_ih^2) \le c_2h^2 \to 0 \;\text{ при }\; h \to 0.$$

Отклонение решения сеточной задачи от решения дифференциальной задачи на сетке оценивается суммарной погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения и граничных условий.

2. Проекционный метод решения граничных задач

2.1. Метод Галеркина

Метод рассмотрим на примере решения граничной задачи с условиями Дирихле

$$y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = f_1(x), \quad a < x < b,$$
$$y(a) = 0, \;\; y(b) = 0.$$

Пусть $p(x) = \exp(\int\limits_a^x p_1(s)ds)$. Умножив дифференциальное уравнение на функцию $-p(x)$ и обозначив $-q_1(x)p(x) = q(x)$, $-f_1(x)p(x) = f(x)$, получим исходное дифференциальное уравнение в дивергентной форме

$$L(y) \equiv -(py')' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b. \tag{2.1}$$

Предположим, что функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям

$$0 < c_0 \le p(x) \le c_1 < \infty, \quad -\infty < k_0 \le q(x) \le k_1 < \infty. \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx, \quad (\varphi, \psi)_1 = \int\limits_a^b \varphi'(x)\psi'(x)dx,$$

где $(\varphi, \psi)_1$ — скалярное произведение в пространстве Соболева

$$\overset{\circ}{H} \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1 (a, b) = \{u(x) : u' \in L_2(a, b), u(a) = u(b) = 0\}.$$

Рассмотрим

$$B(y, \varphi) \equiv (L(y), \varphi) = \int\limits_a^b (py'\varphi' + qy\varphi)dx = (py', \varphi') + (qy, \varphi), \qquad (2.3)$$

где функция $\varphi(x) \in \overset{\circ}{H}$.

Покажем, что $B(y, \varphi)$ — билинейный непрерывный функционал в пространстве $\overset{\circ}{H}$:

1) $B(y, \varphi)$ — ограниченный функционал. Из (2.3), на основании соотношений (2.2), получаем

$$|B(y, \varphi)| \leq c_1 \|y'\| \|\varphi'\| + \max\{|k_0|, |k_1|\} \|y\| \|\varphi\|.$$

Обозначим через $\lambda_k(A)$ — собственные значения оператора $Ay = -d^2y/dx^2$, где $y \in \overset{\circ}{H}$. Тогда в силу неравенства Фридрихса

$$\sqrt{d}\, \|\varphi\| \leq \|\varphi'\|, \quad d = \min_{k=1,\ldots,\infty} \lambda_k(A) = \pi^2/(b-a)^2,$$

имеем :

$$|B(y, \varphi)| \leq (c_1 + \max\{|k_0|, |k_1|\} \frac{(b-a)^2}{\pi^2}) \|y'\| \|\varphi'\| = b_1 \|y'\| \|\varphi'\|. \qquad (2.4)$$

2) Квадратичный функционал $B(y, y)$ ограничен снизу.

Обозначим

$$b_0 = \begin{cases} c_0, & \text{если} \quad k_0 \geq 0, \\ \left(c_0 + k_0(b-a)^2/\pi^2\right), & \text{если} \quad k_0 < 0, \end{cases}$$

и предположим, что $\left(c_0 + k_0(b-a)^2/\pi^2\right) > 0$. Тогда из (2.3) имеем :

$$B(y, y) \geq c_0 \|y'\|^2 + k_0 \|y\|^2 \geq b_0 \|y'\|^2. \qquad (2.5)$$

Определение 2.1. Обобщенной формой уравнения (2.1) назовем уравнение

$$B(y, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}\ . \tag{2.6}$$

Определение 2.2. Обобщенным решением уравнения (2.1) назовем функцию $y(x) \in \overset{\circ}{H}$, удовлетворяющую уравнению (2.6).

При недостаточной гладкости коэффициентов (например, только непрерывность) обобщенное решение может существовать, а обычное решение отсутствовать.

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ — полная линейно независимая система функций в $\overset{\circ}{H}$, называемая *координатной* или *проекционной* системой, $\overset{\circ}{H}_N$ — линейная оболочка функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$, P_N — оператор проектирования на подпространство $\overset{\circ}{H}_N$, то есть $P_N y = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x)$, где коэффициенты c_i находятся путем решения системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} (\varphi_k, \varphi_i)_1 c_i = (\varphi_k, y), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Определение 2.3. Галеркинским приближением обобщенного уравнения (2.6) назовем уравнение

$$B(y, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2.7}$$

или эквивалентное ему уравнение

$$B(y, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}_N\ . \tag{2.8}$$

Определение 2.4. Функцию $y_N = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x) \in \overset{\circ}{H}_N$, удовлетворяющую уравнению (2.7) назовем галеркинским приближением обобщенного решения.

Определение 2.5. Система уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} B(\varphi_i, \varphi_k) c_i = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2.9}$$

называется галеркинской системой линейных алгебраических уравнений.

Лемма 2.1. *Существует единственное галеркинское приближение обобщенного решения.*

Доказательство. Достаточно доказать, что система (2.9) имеет единственное решение. Для этого достаточно убедиться, что однородная система $\sum\limits_{i=1}^{N} B(\varphi_i, \varphi_k) c_i = 0$, $k = 1, \ldots, N$, имеет только нулевое решение. Пусть c_i^0, $i = 1, \ldots, N$, – решение однородной системы. Обозначим $y_N^0(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i^0 \varphi_i(x)$. Умножив однородные равенства на c_k^0 и просуммировав по k, на основании неравенства (2.5) получим $0 = B(y_N^0, y_N^0) \geq$ $\geq b_0 \|y_N^0\|_1^2$. Отсюда следует, что функция $y_N^0(x)$ является постоянной, а в силу $y_N^0 \in \overset{\circ}{H}$ получаем, что $y_N^0(x) \equiv 0$, то есть, $c_i^0 = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Лемма 2.2. *Галеркинское приближение $y_N(x)$ равномерно ограничено, то есть $\|y_N\|_1 \leq const$, $\forall\ N = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Имеем $B(y_N, v_N) = (f, v_N)$ для всех $v_N \in \overset{\circ}{H}_N$. Полагая $v_N = y_N$, в силу (2.5) и неравенства Фридрихса получаем

$$b_0 \|y_N\|_1^2 \leq B(y_N, y_N) = (f, y_N) \leq \|f\| \|y_N\| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{d}} \|y_N\|_1,$$

откуда следует

$$\|y_N\|_1 \leq \frac{1}{b_0 \sqrt{d}} \|f\| = const, \quad \forall\ N = 1, 2, \ldots. \qquad (2.10)$$

В силу ограниченности y_N в гильбертовом пространстве существует подпоследовательность $y_{N'}$, слабо сходящаяся к $y_0 \in \overset{\circ}{H}$ при $N' \to \infty$.

Лемма 2.3. *Функция $y_0(x)$ является обобщенным решением уравнения (2.1).*

Доказательство. Пусть $v_{N'} = P_{N'} v$, тогда в силу полноты координатных функций последовательность функций $v_{N'}$ сходится (сильно) к функции v при $N' \to \infty$. Для галеркинского приближения y_N' имеем равенство $B(y_{N'}, v_{N'}) = (f, v_{N'})$, которое перепишем в виде

$$B(y_{N'}, v) = B(y_{N'}, v - v_{N'}) + (f, v_{N'} - v) + (f, v). \qquad (2.11)$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $N' \to \infty$. В силу билинейности и непрерывности функционала B, имеем :

$$B(y_{N'}, v) \to B(y_0, v) \quad \text{при} \quad N' \to \infty.$$

Далее, так как в силу неравенств (2.4), (2.10) имеем :

$$|B(y_{N'}, v - v_{N'})| \leq b_1 \|y_{N'}\|_1 \|v - v_{N'}\|_1 \leq \frac{b_1 \|f\|}{b_0 \sqrt{d}} \|v - v_{N'}\|_1 \to 0,$$

$$|(f, v_{N'} - v)| \leq \|f\| \|v_{N'} - v\| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{d}} \|v_{N'} - v\|_1 \to 0,$$

то из неравенства (2.11) получаем

$$B(y_0, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}, \tag{2.12}$$

на слабом пределе y_0 последовательности $\{y_N\}_{N=1}^{\infty}$ галеркинских приближений.

Лемма 2.4. *Обобщенное решение единственно.*

Доказательство. Пусть имеется другое обобщенное решение $z_0(x) \in \overset{\circ}{H}$, удовлетворяющее равенству $B(z_0, v) = (f, v)$ для всех $v \in \overset{\circ}{H}$. Тогда $B(y_0 - z_0, v) = 0$. Положив $v = y_0 - z_0$, получаем неравенство $b_0 \|y_0 - z_0\|_1^2 \leq B(y_0 - z_0, y_0 - z_0) = 0$, из которого следует $y_0 - z_0 \equiv 0$.

Лемма 2.5. *Справедлива оценка погрешности*

$$\|y_N - y_0\|_1 \leq \frac{b_1}{b_0} \|P_N y_0 - y_0\|, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{2.13}$$

Доказательство. Равенство (2.12) для обобщенного решения y_0 справедливо, в частности, при $v = v_N \in \overset{\circ}{H}_N$. Вычитая галеркинское уравнение (2.8) при $y = y_N$ и $v = v_N$, получаем $B(y_N - y_0, v_N) = 0$. Полагая в последнем равенстве $v_N = y_N$ и $v_N = P_N y_0$, получаем равенства $B(y_N - y_0, y_N) = 0$, $B(y_N - y_0, P_N y_0) = 0$, из которых вытекает

$$\|y_N - y_0\|_1^2 \leq \frac{1}{b_0} B(y_N - y_0, y_N - y_0) =$$

$$= \frac{1}{b_0} B(y_N - y_0, P_N y_0 - y_0) \leq \frac{b_1}{b_0} \|y_N - y_0\|_1 \|P_N y_0 - y_0\|_1,$$

откуда следует неравенство (2.13).

2.2. Галеркинская система функций в случае конечных элементов на основе линейных базисных сплайнов

Возьмем в качестве координатной системы функций базисные сплайны. Тогда проекционный метод превращается в метод конечных элементов. Преимущество последнего состоит в том, что галеркинская система линейных алгебраических уравнений имеет разреженную матрицу (трехдиагональную в случае линейных сплайнов и пятидиагональную в случае кубических сплайнов), являющуюся хорошо обусловленной и для которой имеются удобные (типа прогонки) методы обращения.

Пусть граничные условия имеют вид

$$-y' + \mu_0 y = m_0 \quad \text{при} \;\; x = a, \qquad y' + \mu_1 y = m_1 \quad \text{при} \;\; x = b,$$

где $\mu_0 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$. В случае $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$ имеем : $\varphi \neq q \geq 0$. Возьмем базисную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при} \quad |x| \leq 1, \\ \quad 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Ее можно представить формулой $\varphi(x) = (1 - |x| + |1 - |x||)/2$. Базисные линейные сплайны определяются равенствами

$$\varphi_k(x) = \varphi((x - x_k)/h), \;\; x_k = a + kh, \; h = (b - a)/N, \; k = 0, \ldots, N.$$

Обобщенное решение $y(x)$ удовлетворяет равенству

$$(f, \varphi) = (Ly, \varphi) \equiv (py', \varphi') + (qy, \varphi) - py'\varphi|_a^b.$$

Учитывая граничные условия, получаем

$$B(y, \varphi) + \mu_0 p(a) y(a) \varphi(a) + \mu_1 p(b) y(b) \varphi(b) =$$
$$= m_0 p(a) \varphi(a) + m_1 p(b) \varphi(b) + (f, \varphi), \qquad \forall \, \varphi \in W_2^1(a, b) \equiv H.$$

Возьмем $\varphi = \varphi_k(x)$, $k = 0, \ldots, N$, $y = y_N(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} \xi_i \varphi_i(x)$, тогда из последнего равенства получим галеркинскую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{N} B(\varphi_i, \varphi_k) \xi_i + \mu_0 p_0 \varphi_k(a) \xi_0 + \mu_1 p_N \varphi_k(b) \xi_N =$$

$$= m_0 p_0 \varphi_k(a) + m_1 p_N \varphi_k(b) + (f, \varphi_k), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Здесь $p_0 = p(x_0)$, $p_N = p(x_N)$, $y_N(a) = \xi_0$, $y_N(b) = \xi_N$, $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, N$. Приведем эту систему к виду, удобному для решения методом прогонки. Для этого рассмотрим отдельно уравнение при $k = 0$, при $k = 1, \ldots, N{-}1$, при $k = N$. Принимая во внимание, что

$$B(\varphi_i, \varphi_k) = 0 \quad \text{при} \quad |i - k| \geq 2, \quad y_N(a) = \xi_0, \quad y_N(b) = \xi_N,$$

и обозначая

$$A_k = B(\varphi_{k-1}, \varphi_k),\ k = 1, \ldots, N, \qquad B_k = B(\varphi_k, \varphi_k),\ k = 0, \ldots, N,$$
$$C_k = B(\varphi_{k+1}, \varphi_k),\ k = 0, \ldots, N{-}1, \quad D_0 = m_0 p_0 + (f, \varphi_0),$$
$$D_k = (f, \varphi_k),\ k = 1, \ldots, N{-}1, \qquad D_N = m_1 p_N + (f, \varphi_N),$$

имеем уравнения

$$(B_0 + \mu_0 p_0)\xi_0 + C_0 \xi_1 = D_0,$$
$$A_k \xi_{k-1} + B_k \xi_k + C_k \xi_{k+1} = D_k, \quad k = 1, \ldots, N{-}1,$$
$$A_N \xi_{N-1} + (B_N + \mu_1 p_N)\xi_N = D_N,$$

откуда получаем

$$\xi_0 = k_0 \xi_1 + D_0/(B_0 + \mu_0 p_0), \quad k_0 = -C_0/(B_0 + \mu_0 p_0),$$
$$A_k \xi_{k-1} + B_k \xi_k + C_k \xi_{k+1} = D_k, \quad k = 1, \ldots, N{-}1,$$
$$\xi_N = k_1 \xi_{N-1} + D_N/(B_N + \mu_1 p_N), \quad k_1 = -A_N/(B_N + \mu_1 p_N).$$

Нетрудно убедиться, что справедливы неравенства

$$0 < k_0 \leq 1, \quad 0 < k_1 \leq 1,$$

$$B_k \geq |A_k| + |C_k|,\ k = 1, \ldots, N{-}1, \quad B_0 \geq |C_0|, \quad B_N \geq |A_N|,$$

причем одно из нестрогих неравенств является строгим. И, значит, система уравнений может быть решена методом прогонки.

Замечание 2.1. В случае, когда граничные условия имеют вид $y(a) = m_0$, $y(b) = m_1$, то первое и последнее уравнение системы имеют, соответственно, вид $\xi_0 = m_0$, $\xi_N = m_1$.

Список использованной литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.

Навчальне видання

Сохін Анатолій Семенович
Скорик Василь Олександрович

Чисельне розв'язання граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь

(Рос. мовою)

Коректор *О. В. Токар*
Комп'ютерне верстання *В. О. Скорик*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 1,0.
Тираж 50 пр. Замовлення № 304/13.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009.
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32