

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

## **Кваліфікаційна робота**

### **магістра**

на тему: «Задача керування математичним маятником з  
невід'ємним керуванням»

Виконала: студентка групи МП-61

II курсу (другий магістерський рівень),  
спеціальності 113 Прикладна математика

Прикладна математика

Манза Ксенія

Керівник: д. ф-м н., професор Коробов В. І.

Рецензент: к. ф-м н. Смрцова Т. І.

Харків - 2022 рік

## Анотація

Манза К. С.

Задача керування математичним маятником з невід'ємним керуванням.

Кваліфікаційна робота магістра на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 113 «Прикладна математика» - Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. Кафедра прикладної математики.

Харків, 2022 рік.

Робота містить 52 с., 17 малюнків, список використаних джерел з 11 найменувань, 8 розділів.

Кваліфікаційна робота присвячена задачі керування математичним маятником з невід'ємним керуванням, а саме, у роботі було показано: постановка задачі керування математичним маятником з невід'ємним керуванням, її розв'язок та надано фазовий портрет, тобто зображення траєкторії.

У першому розділі кваліфікаційної роботи ми розібрали приклад задачі керування математичним маятником з керуванням, що обмежене по модулю одиницею, який було наведено у книзі [1]. Далі, у другому розділі, було наведено фазовий портрет для задачі з додатним керуванням. У третьому розділі роботи було наведено декілька прикладів задач з додатним керуванням, які були наведені у статі [3]. У четвертому розділі ми нагадали властивості рівнянь Ейлера. П'ятий розділ кваліфікаційної роботи присвячено задачі позиційного синтезу обмеженого керування, знаходженню розв'язку цієї задачі в аналітичній формі та надання траєкторії керування у явному вигляді. У наступному, шостому розділі, ми розглядаємо функцію керуваності як час руху у випадку матриці інтегрального вигляду та наводимо приклад розв'язку задачі позиційного синтезу на основі функції керуваності, що дорівнює часу руху, для трьохвимірної канонічної системи. У сьомому розділі роботи було розглянуто приклад задачі керування математичним маятником з попаданням не у точку спокою. В останньому восьмому розділі була розглянута задача, коли функція керуваності є часом руху, на прикладі візка.

В даній роботі розглянуто розв'язок задач з додатним керуванням, розв'язок задачі керування з системою коливального виду, побудовані фазові портрети, також розглянуто розв'язок задач аналітичним способом.

## Abstract

Manza K. S.

The problem of controlling a mathematical pendulum with non-negative control.

Master's qualification work for obtaining a master's degree in specialty 113 "Applied mathematics" - V. N. Karazin Kharkiv National University. Department of Applied Mathematics.

Kharkiv, 2022.

The work contains 52 pages, 17 figures, a list of used sources with 11 titles, 8 chapters.

The qualification work is devoted to the problem of controlling a mathematical pendulum with non-negative control, namely, the work showed: the formulation of the problem of controlling a mathematical pendulum with non-negative control, its solution, and a phase portrait, i.e., an image of the trajectory, was provided.

In the first chapter of the qualification paper, we analyzed an example of the control problem of a mathematical pendulum with control limited by unit modulus, which was given in the book [1]. Then, in the second section, the phase portrait for the positive control problem was given. In the third section of the work, several examples of problems with positive control, which were given in [3], were showed. In the fourth chapter, we recalled the properties of Euler's equations. The fifth section of the qualification work is devoted to the problem of positional synthesis of limited control, finding a solution to this problem in an analytical form and providing the control trajectory in an explicit form. In the next, sixth chapter, we consider the controllability function as the time of movement in the case of a matrix of integral form and give an example of the solution of the problem of positional synthesis based on the controllability function equal to the time of movement for a three-dimensional canonical system. In the seventh chapter of the work, an example of the problem of controlling a mathematical pendulum with not hitting the point of rest was considered. In the last, eighth chapter, the problem was considered when the controllability function is the time of movement, using the example of a cart.

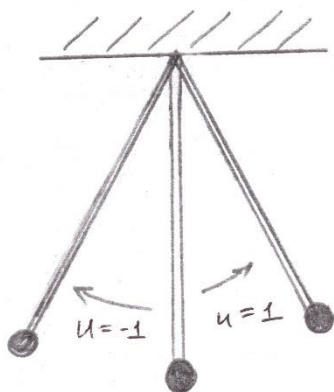
In this paper, the solution of problems with positive control, the solution of the control problem with a system of oscillating form, phase portraits are constructed, and the solution of problems by an analytical method is also considered.

## Зміст

Вступ .....	5
1. Постановка задачі швидкодії з керуванням, що обмежене по модулю одиницею .....	6
2. Постановка задачі швидкодії з додатним керуванням та її фазовий портрет .....	14
3. Інші приклади задач з додатним керуванням .....	16
4. Рівняння Ейлера .....	23
5. Задача позиційного синтезу обмеженого керування .....	24
6. Функція керованості як час руху у випадку матриці інтегрального вигляду .....	35
7. Задача керування математичним маятником з попаданням не у точку спокою .....	45
8. Задача коли функція керованості є часом руху на прикладі візка ..	46
Висновки .....	50
Список використаних джерел .....	51

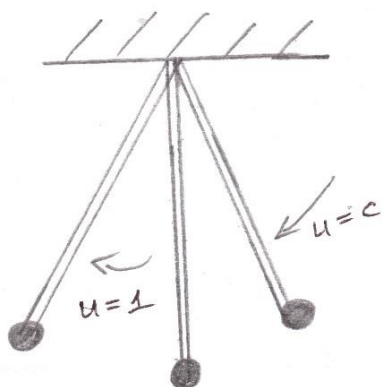
## Вступ

Розглянемо постановку задачі з математичним маятником.



Маємо грузик, що підвісили на стрижні. Після того, як задаємо йому рух поштовхом, хочемо зупинити.

Так виглядає малюнок у випадку  $u = \pm 1$ . Тобто обидві сторони гальмуємо кожною з сил і таким чином зупиняємо маятник.



Якщо  $u = [c, 1]$ . Злегка штовхаємо вліво, а зліва гальмуємо, коли доходимо до крайнього положення. Тобто гальмуємо більшою силою, а штовхаємо меншою.

Через деякий час маятник зупиниться.

Тобто, основна мета роботи, розглянути таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}, \text{ де } 0 < c \leq u \leq 1$$

– задача оптимального керування для маятника з додатним керуванням. Вона полягає у тому, щоб знайти керування, що переводить систему у заданий стан за мінімальний час при заданому обмеженні.

Також виконано фазовий портрет траєкторій, за якими рухається довільно взята точка.

# 1. Постановка задачі швидкодії з керуванням, що обмежене по модулю одиницею

В цьому розділі ми нагадаємо постановку модельної задачі швидкодії при обмеженні на керування від -1 до 1, що було наведено у книзі [1].

Розглянемо рівняння  $\ddot{x} + x = u$ ,  $|u| \leq 1$ . Це рівняння еквівалентно системі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \quad (1.1)$$

для якої ми вивчимо задачу про скоріше попадання у початок координат.

Для розв'язання цієї задачі ми застосуємо принцип максимуму Понтрягіна[1].

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вид:

$$H(\psi, x, u) = (\psi(t), f(x, u)) = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u \quad (1.2)$$

Далі, для допоміжних змінних  $\psi_1, \psi_2$  отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}$$

звідки  $\psi_2 = A \sin(t - \alpha_0)$ , де  $A > 0$  та  $\alpha_0$  - деякі постійні.

**Теорема[1].** Нехай  $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ , - допустиме керування, що переводить фазову точку з положення  $x_0$  у положення  $x_1$ , а  $x(t)$  - відповідна траєкторія, так що  $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ . Для оптимальності (за швидкодією) керування  $u(t)$  та траєкторії  $x(t)$  необхідно існування такої ненульової неперервної вектор-функції  $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$ , що відповідає функціям  $u(t)$  та  $x(t)$ , що:

1.  $\forall t, t_0 \leq t \leq t_1$ , функція  $H(\psi(t), x(t), u)$  змінного  $u \in U$  досягає у точці  $u = u(t)$  максимуму

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) \quad (1.3)$$

2. В кінцевий момент  $t_1$  виконано співвідношення

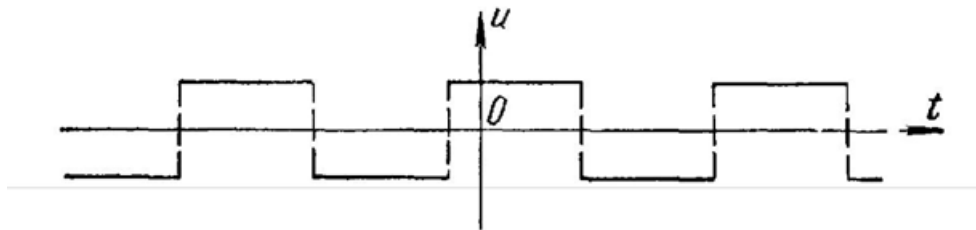
$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0 \quad (1.4)$$

Нагадаємо короткий виклад розв'язання задачі оптимального керування для системи (1.1), вперше отриманий у книзі [1].

Співвідношення (1.3) дає нам (враховуючи (1.2) та умову  $|u| \leq 1$ )

$$u = \operatorname{sign} \psi_2 = \operatorname{sign}(A \sin(t - \alpha_0)) = \operatorname{sign}(\sin(t - \alpha_0)) \quad (1.5)$$

Звідки випливає, що функція  $u(t)$  виходить з функції  $\operatorname{sign}(\sin t)$ , що дорівнює по черзі  $+1$  та  $-1$  на інтервалах довжини  $\pi$ , за допомогою зсуву на певний відрізок  $\alpha_0$ .



Мал. 1.

Задля вивчення частин траєкторій, що відповідають відрізкам часу, на яких  $u = 1$  та  $u = -1$ , розглянемо допоміжну систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

(отриману із системи (1.1) коли  $u = 0$ ). Довільне рішення цієї системи може бути записане у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = -R \cos(t + \gamma) \\ x_2 = R \sin(t + \gamma) \end{cases}, \quad (1.7)$$

де  $R$  та  $\gamma$  – постійні ( $R \geq 0, 0 \leq \gamma < 2\pi$ ). Таким чином, фазовими траєкторіями є кола із центром у початку координат:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = R^2 \quad (1.8)$$

З (1.7) видно, що рух фазової точки по колу (1.8) відбувається за годинною стрілкою, причому рівномірно, з лінійною швидкістю  $2\pi R$  (один оборот за час  $2\pi$ ). Помітимо, що за проміжок часу, який має довжину  $\pi$ , фазова точка, рухаючись за годинною стрілкою, описує рівно *половину* кола (1.8).

При  $u = 1$  система (1.1) приймає вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \quad (1.9)$$

або

$$\begin{cases} \frac{d(x_1 - 1)}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -(x_1 - 1) \end{cases} \quad (1.10)$$

Враховуючи співвідношення (1.6) та (1.8), знаходимо, що фазові траєкторії системи (1.10) являють собою кола

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 = R^2, \quad (1.11)$$

тобто кола з центром у точці  $O_1$ , яка має координати  $(1, 0)$ . Ці кола фазова точка, що рухається за законом (1.9) (тобто за законом (1.1) коли  $u = 1$ ), пробігає за годинною стрілкою, обходячи за час  $\pi$  рівно половину кола.

Аналогічно, при  $u = -1$  система (1.1) приймає вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1 \end{cases}$$

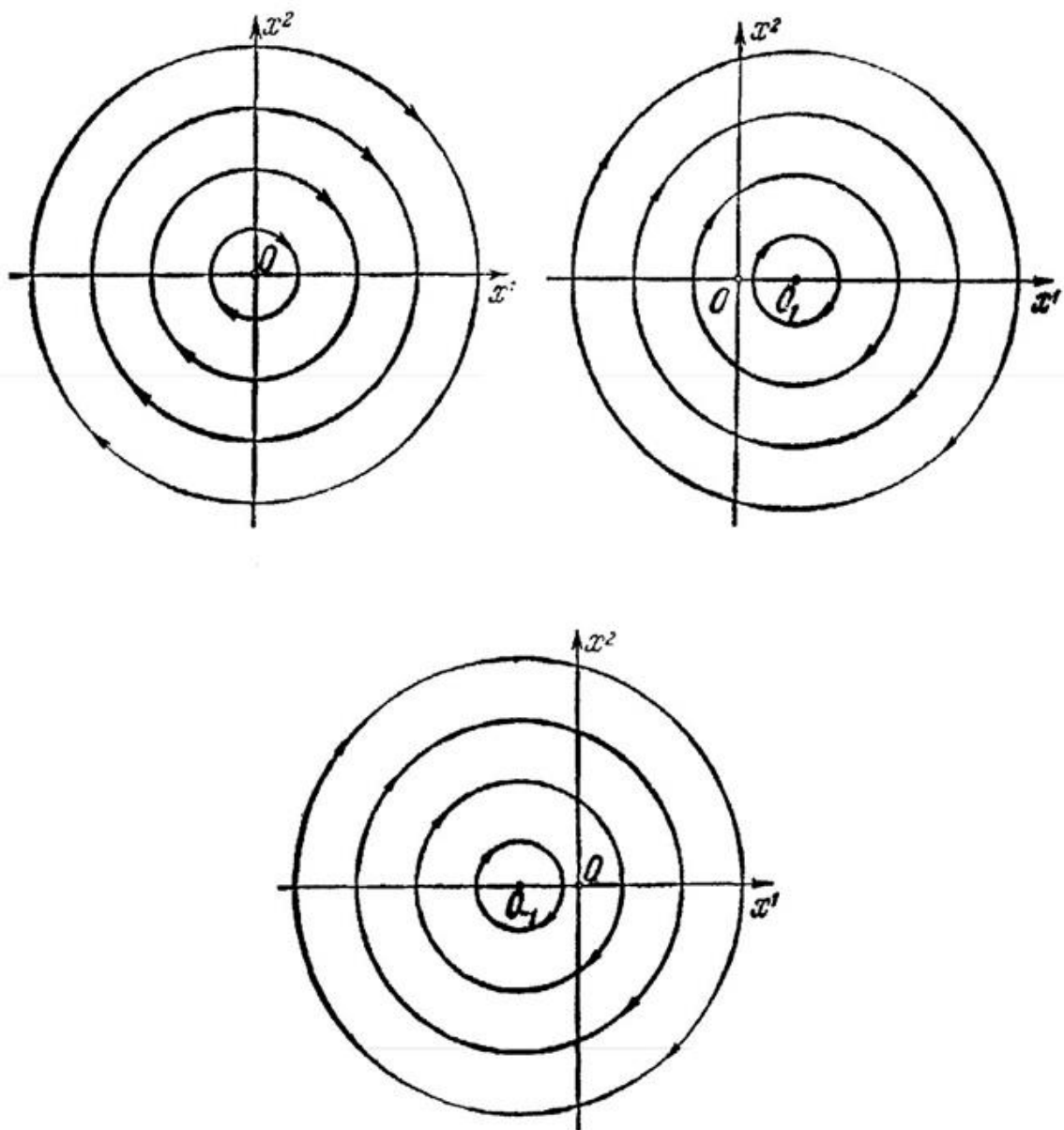
Її фазовими траєкторіями також є кола

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2)^2 = R^2, \quad (1.12)$$

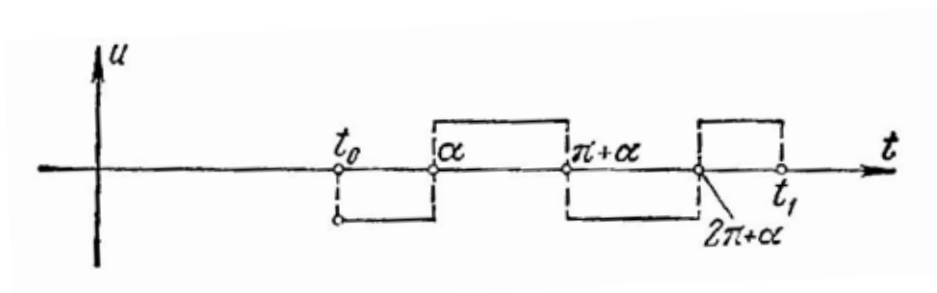
із центром у точці  $O_{-1}$ , яка має координати  $(-1, 0)$ . По цим колам фазова точка рухається за годинною стрілкою, проходячи рівно половину кола за час  $\pi$ .

Як було зазначено вище, кожне оптимальне керування  $u(t)$  є кусочно-постійною функцією, що виходить з функції  $\text{sign}(\sin t)$ , що дорівнює по черзі  $+1$  та  $-1$  на інтервалах довжини  $\pi$ , за допомогою зсуву на певний відрізок  $\alpha_0$ . Якщо оптимальне керування має вигляд як на Мал. 3, тобто по черзі дорівнює  $+1$  та  $-1$  на інтервалах  $(t_0, \alpha), (\alpha, \pi + \alpha), (\pi + \alpha, 2\pi + \alpha), \dots$  та, у підсумку, на деякому інтервалі довжини  $\beta < \pi$  дорівнює  $+1$ , то відповідна оптимальна траєкторія може бути побудована наступним чином.





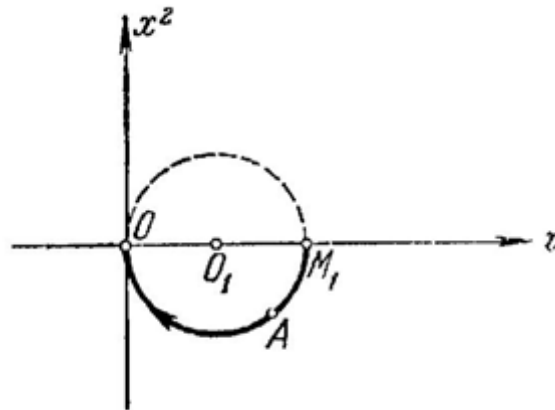
Мал. 2.



Мал. 3.

На протязі заключного відрізка часу (довжини  $\beta$ ) фазова точка рухається по колу виду (1.11) (бо  $u = 1$  на цьому відрізку часу), причому по тому з цих кіл, яке

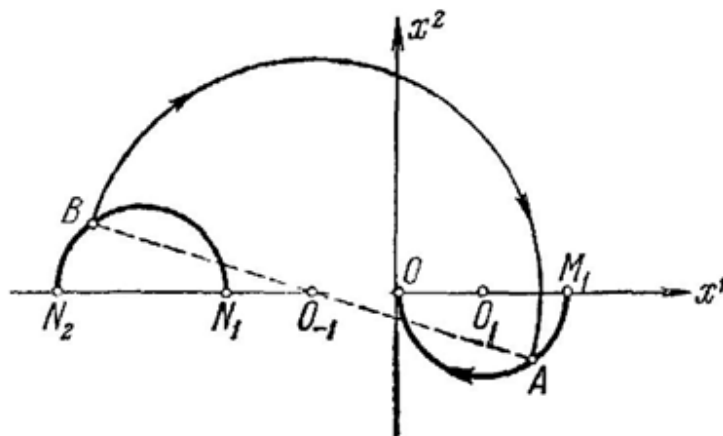
проходить через початок координат (бо шукана траєкторія повинна вести у початок координат). Таким колом є коло радіуса 1 із центром у точці  $O_1$ :



Мал. 4.

По цьому колу фазова точка потрапляє у початок координат, проходячи дугу, меншу за половину кола (бо  $\beta < \pi$ ). Таким чином, позначивши нижнє півколо цього кола через  $M_1O$ , ми знайдемо, що заключна частина фазової траєкторії являє собою деяку дугу  $AO$  півкола  $M_1O$ .

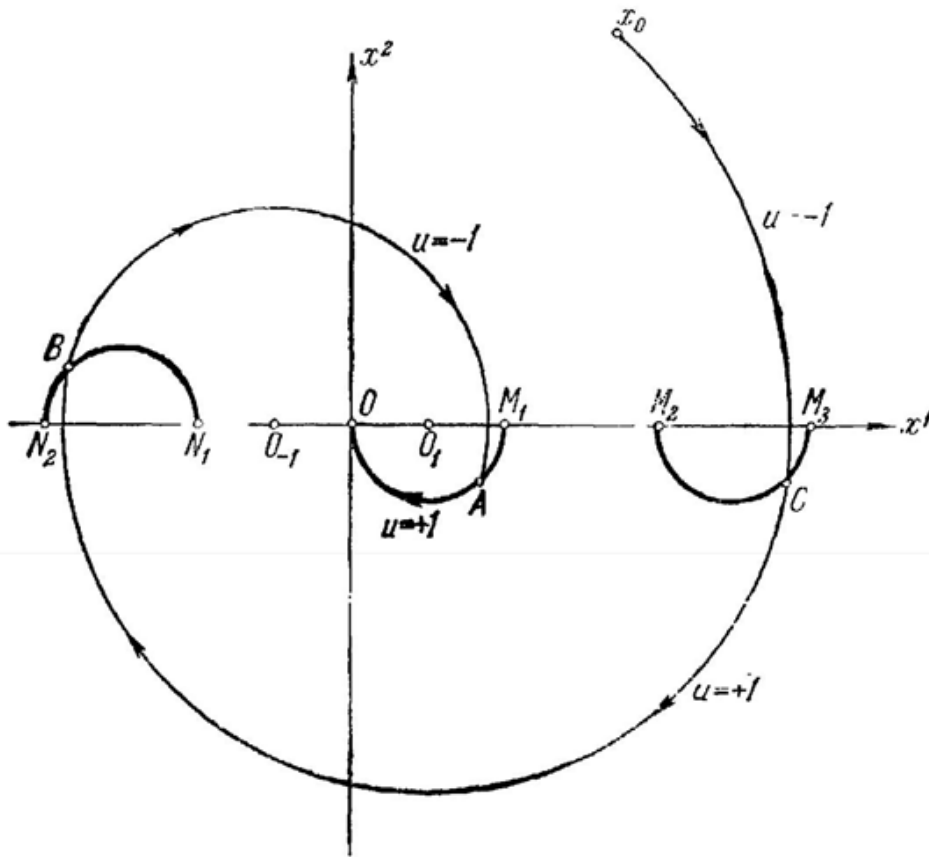
Далі, у положення  $A$  фазова точка потрапила, рухаючись протягом відрізка часу, що має довжину  $\pi$ , під дією керування  $u = -1$  (див. Мал. 3), тобто попередня частина фазової траєкторії являє собою півколо  $BA$  з центром у точці  $O_{-1}$ , що закінчується у точці  $A$ :



Мал. 5.

Так як дуга  $BA$  дорівнює півколу, то точка  $B$  симетрична  $A$  відносно центру  $O_{-1}$ , і тому точка  $B$  лежить на півколі  $N_1N_2$ , симетричному до півкола  $OM_1$  відносно центру  $O_{-1}$ . Так само попередня дузі  $BA$  дуга  $CB$ , відповідна до

відрізку часу довжини  $\pi$ , на якому  $u = 1$ , дорівнює півколу з центром  $O_1$ , тому точка  $C$  лежить на півколі  $M_2M_3$ , що симетричне півколу  $N_1N_2$  відносно центру  $O_1$ :

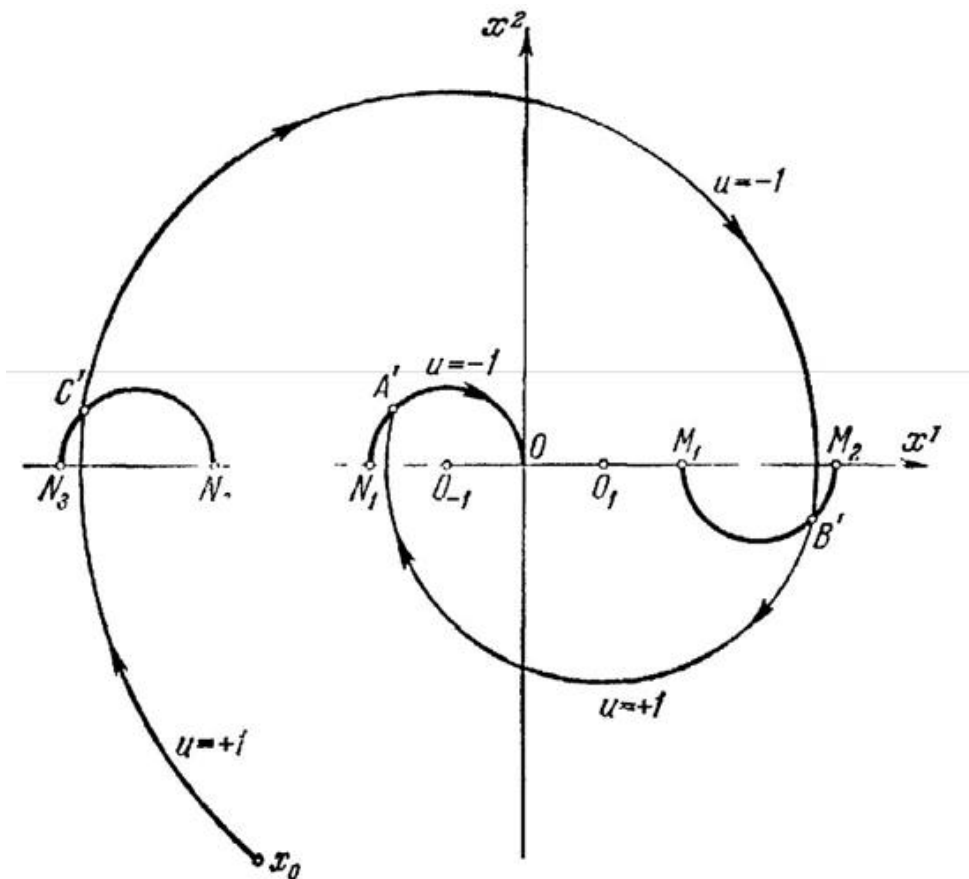


Мал. 6.

і т.д.

Таким чином, відповідна фазова траєкторія має вигляд, показаний на Мал. 6 (початкова частина фазової траєкторії буде менше половини кола, якщо тільки  $0 < \alpha - t_0 < \pi$ , див. Мал. 3).

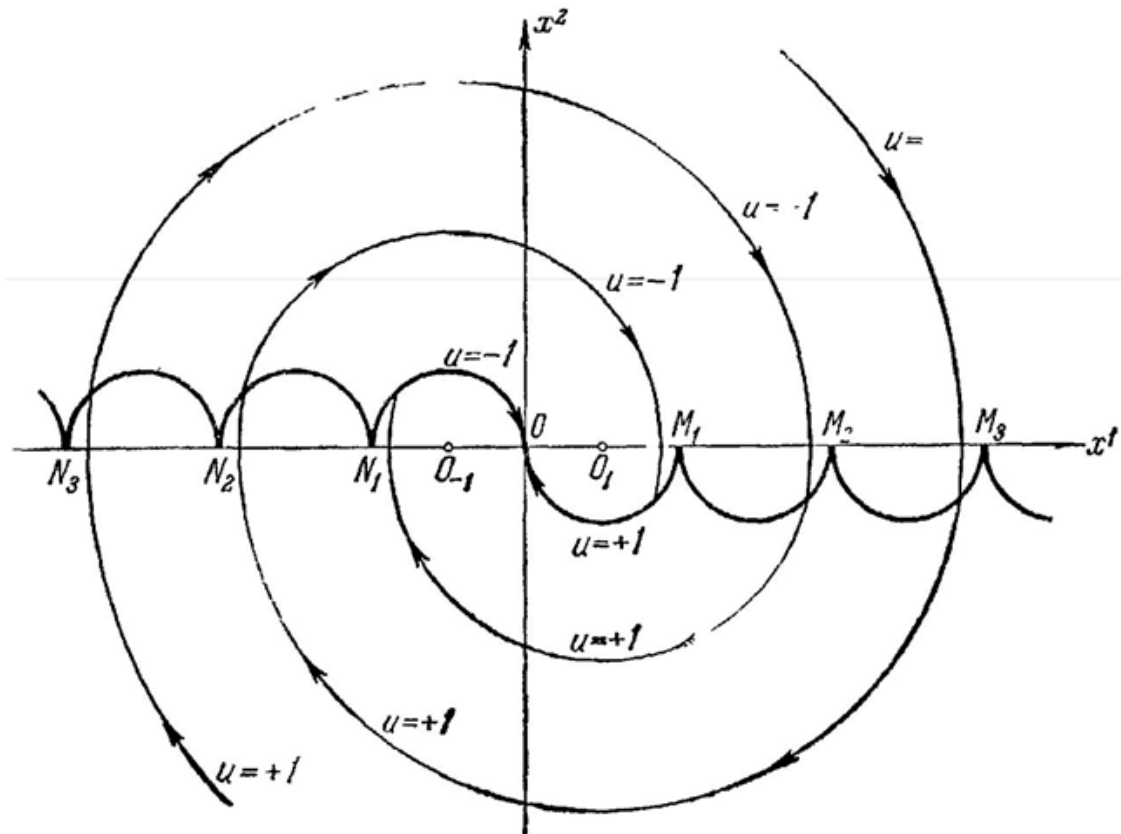
Фазова траєкторія, що відповідає оптимальному керуванню  $u(t)$ , яке на заключному відрізку довжини  $\beta$  дорівнює  $-1$  (а не  $+1$ ), виходить із траєкторії, зображеної на Мал. 6, за допомогою центральної симетрії (Мал. 7).



Мал. 7.

Для такої траєкторії точки «стику» дуг кіл будуть лежати на півколах  $ON_1, M_1M_2, N_2N_3, \dots$ , симетричних (відносно початку координат) півколам  $OM_1, N_1N_2, M_2M_3, \dots$ .

Об'єднуючи обидва ці випадки (Мал. 6 та 7) разом, отримуємо усю картину поведінки фазових траєкторій (Мал. 8). На Мал. 8 надписані на дугах фазових траєкторій відповідні значення керуючого параметра  $u$ . Із Мал. 8 видно, що якщо початкова точка  $x_0$  розташована *вище* лінії  $\dots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\dots$ , складеної з нескінченного числа півкіл радіуса 1, то фазова точка повинна рухатись під дією керування  $u = -1$  до тих пір, доки вона не потрапить на дугу  $\dots M_3M_2M_1O$ ; у момент попадання на цю дугу значення  $u$  переключається та залишається рівним  $+1$  (фазова точка при цьому рухається *нижче* лінії  $\dots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\dots$ ) до моменту попадання на дугу  $ON_1N_2N_3\dots$ ; потім точка знову рухається *вище* лінії  $\dots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\dots$  під дією керування  $u = -1$  і т. д.



Мал. 8.

Остання частина фазової траєкторії (що веде у початок координат) являє собою дугу півкола  $M_1O$  або півкола  $N_1O$ . Цілком аналогічно рухається точка  $i$  в тому випадку, якщо початкова точка  $x_0$  розташована *нижче* лінії  $\dots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\dots$ : вище цієї лінії фазова точка рухається під дією керування  $u = -1$ , а нижче цієї лінії – під дією керування  $u = +1$ .

Отже, згідно теореми, тільки вказані траєкторії можуть бути оптимальними, причому із проведеного дослідження видно, що з кожної точки фазової площини виходить тільки *одна* траєкторія, що веде у початок координат, яка може бути оптимальною. Можна довести, що у розглянутій задачі для будь-якої початкової точки  $x_0$  існує оптимальна траєкторія. Таким чином, знайдені траєкторії (Мал. 8) є оптимальними, і інших оптимальних траєкторій, що ведуть у початок координат, не існує.

Позначимо через  $v(x_1, x_2) = v(x)$  функцію, задану на площині  $x_1, x_2$  співвідношеннями:

$$v(x) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

де  $+1$  – нижче лінії  $\dots M_3 M_2 M_1 O N_1 N_2 N_3 \dots$  та на дузі  $\dots M_3 M_2 M_1 O$ ,

а  $-1$  – вище лінії  $\dots M_3 M_2 M_1 O N_1 N_2 N_3 \dots$  та на дузі  $O N_1 N_2 N_3 \dots$

Тоді впродовж кожної оптимальної траєкторії  $x(t)$  відповідне оптимальне керування  $u(t)$  має вигляд

$$u(t) = v(x(t)).$$

Це, як і вище, значить, що, замінив у системі (1.1) величину  $u$  функцією  $v(x)$ , ми отримаємо систему

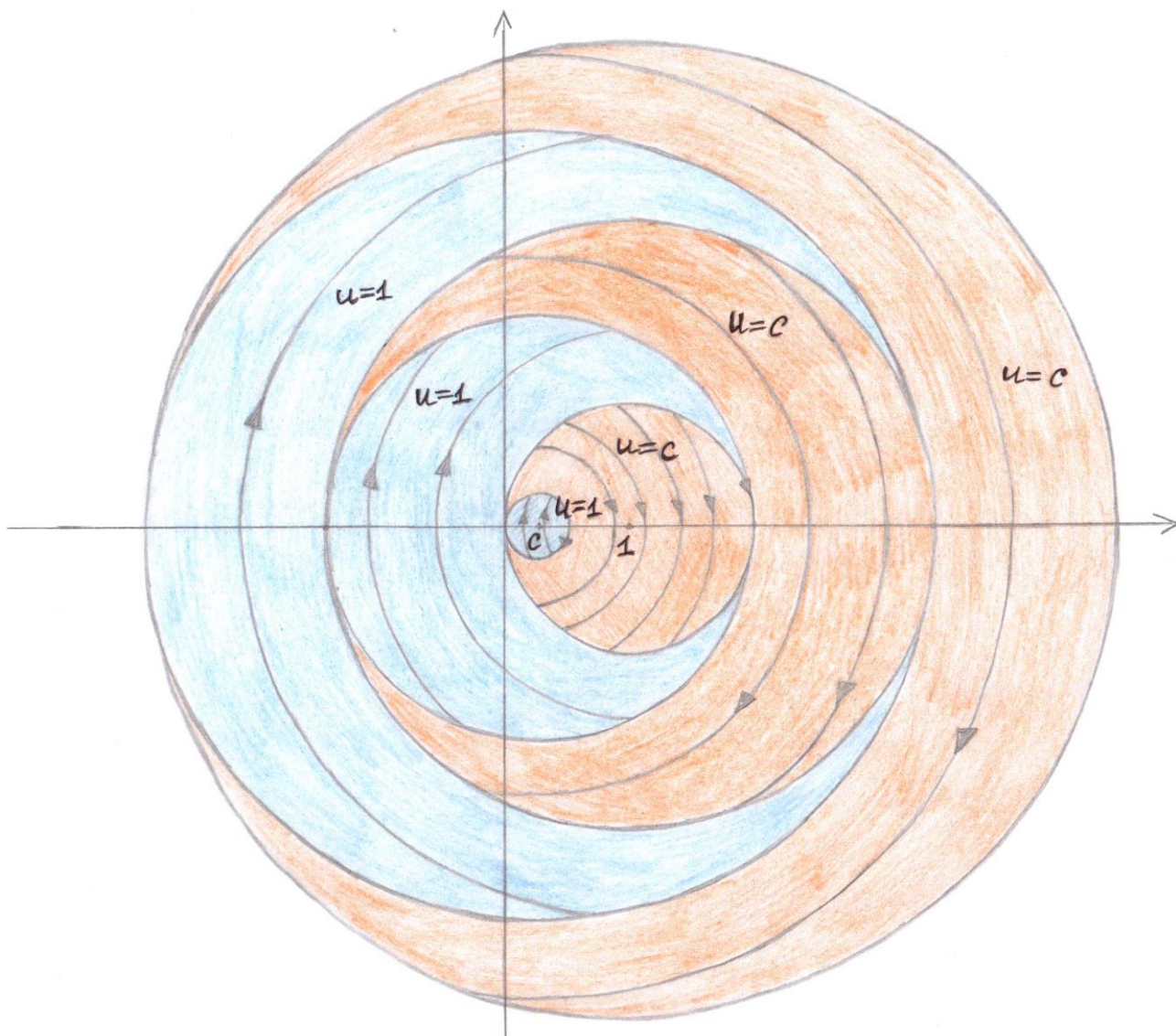
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + v(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.13)$$

розв'язок якої (при довільному початковому стані  $x_0$ ) дає оптимальну фазову траєкторію, що веде у початок координат. Інакше кажучи, система (1.13) являє собою систему диференціальних рівнянь (із розривною правою частиною) для знаходження оптимальних траєкторій, що ведуть у початок координат.

## 2. Постановка задачі швидкодії з додатним керуванням та її фазовий портрет

В цьому розділі ми наведемо аналогічні міркування для задачі з додатним керуванням.

В силу принципу максимуму, отримуємо, що керування приймає граничні умови  $u = c$  та  $u = 1$ , що відповідають фазовим траєкторіям – колам з центрами у точках  $1$  та  $c$ .



Мал. 9.

Блакитний колір – траєкторії, де  $u = 1$ .

Помаранчевий колір – траєкторії, де  $u = c$ .

Отже, якщо брати точку на будь-якому з кіл (з центром у точці  $c$  або у точці  $1$ ), то не буде ніяких точок перемикання, будемо рухатись одразу за цими колами до початку координат.

Якщо взяти точку всередині маленького кола (з центром у точці  $c$  та радіусом  $c$ ), то треба рухатись за траєкторіями, що виходять з великого кола (з центром у

точці 1 та радіусом 1), доки ми не потрапимо на маленьке коло, а потім вже по ньому у початок координат. Тобто одна точка перемикання.

Якщо взяти точку всередині великого кола (з центром у точці 1 та радіусом 1), то маємо два способи потрапити до початку координат: по самому ж великому колу (з центром у точці 1 та радіусом 1) та по маленькому (з центром у точці  $c$  та радіусом  $c$ ), у залежності від того, де була узята точка і чи перетинається траєкторія руху з маленьким колом (з центром у точці  $c$  та радіусом  $c$ ).

І т. д.

Далі, відповідно, будемо рухатись по траєкторіям великого або маленького кіл, у залежності від того, де будемо брати точку. Таким чином, отримуємо щось на зразок системи вкладених кіл, що перетинаються одна з одною відповідно у одній точці – отримали кінцеву фазову траєкторію.

Тобто, чим далі ми від початку координат, тим більше точок перемикання.

### 3. Інші приклади задач з додатним керуванням

В цьому розділі ми наведемо деякі приклади із статті В. І. Коробова «Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control» [3].

Почнемо з базових визначень, якими далі будемо користуватись.

Розглянемо лінійну керовану систему виду

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \quad x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^r, \quad (3.1)$$

де  $A$  - матриця з дійсними значеннями, а  $\varphi(u)$  - дійсна неперервна  $n$ -векторна функція.

Позначимо через  $S(T)$  множину нуль-керованості (3.1) для часу  $T > 0$ , тобто множину всіх точок  $x(0) = x_0$ , з яких можна досягти точки  $x(T) = 0$  за час  $T$  з використанням допустимого керування  $u = u(t)$ .

Так як розв'язок  $x(t)$  задачі Коші

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

має вигляд

$$x(t) = e^{At} \left( x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} \varphi(u(\tau)) d\tau \right), \quad t \in [0, T],$$



тоді

$$S(T) = \left\{ x_0 \in R^n : x_0 = -\int_0^T e^{-A\tau} \varphi(u(\tau)) d\tau, u(t) \in \Omega, t \in [0, T] \right\}.$$

**Визначення[3].** Нехай  $S = \bigcup_{T>0} S(T)$  множина нуль-керуваності (3.1). Система (3.1) називається локально нуль-керуваною, якщо  $0 \in \text{int } S$ .

У якості прикладів ми будемо розглядати системи виду:

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + \nu x_2, \quad \dot{x}_2 = -\nu x_1 + \mu x_2 + u, \quad \Omega = \{c, 1\} \quad (3.2)$$

**Теорема 1[3].** Система  $\dot{x} = Ax + \varphi(u)$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in \Omega \subset R^r$  є локально нуль-керуваною тоді і тільки тоді, коли:

(i) виконується умова повернення на деякому додатному інтервалі  $I = [T^*, T^* + a](a > 0, T^* \geq 0)$ ;

(тобто можна повернутись у ту ж точку, замість точки спокою).

(ii) для певного  $m \geq 0$ , наступні два включення мають місце:

$$0 \in \text{int } \text{co}\{\varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \dots, A^m \varphi(\Omega)\},$$

$$0 \in \text{int } \text{co}\{\varphi(\Omega), -A\varphi(\Omega), \dots, (-1)^m A^m \varphi(\Omega)\}.$$

Якщо матриця  $A$  не має дійсних власних значень, тоді умову (ii) можна замінити умовою

$$(ii') \text{int } \text{co}\{0, \varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \dots, A^m \varphi(\Omega)\} \neq \emptyset, m \geq 0.$$

Якщо  $\nu \neq 0$ , то матриця  $A$  системи (3.2) не має дійсних власних значень; у цьому випадку, у теоремі 1 [3] достатньо врахувати умову (ii'):

Більш того, оскільки  $\varphi(\Omega) = \{(0, u)^* : u \in \Omega\}$  та  $A\varphi(\Omega) = \{(\nu u, \mu u)^* : u \in \Omega\}$ , тоді  $\nu \neq 0$  дає  $\text{int } M_{1,0} \neq \emptyset$ . Отже, умова (ii') теореми 1 [3] виконана. Отож, помітимо, що умова повернення у момент  $T$  означає, що для певного допустимого керування  $u_T(t)$ ,

$$\int_0^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u_T(\tau) d\tau = \int_0^T e^{-\mu\tau} \cos \nu\tau u_T(\tau) d\tau = 0. \quad (3.3)$$

**Приклад 1.** Нехай  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $\Omega = \{c, 1\}$ , де  $c = e^{-\mu\pi/\nu}$ . У цьому випадку  $\text{int } M_{1,0} \neq \emptyset$ . Розглянемо умову повернення. Позначимо послідовність  $T_k = 2\pi k/\nu$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Для будь-якого фіксованого  $k$ , обираємо керування  $u_k(t)$ ,  $t \in [0, T_k]$  у наступному вигляді:

$$u_k(t) = \begin{cases} c, & t \in [2j\pi/\nu, (2j+1)\pi/\nu], \forall j = 0, 1, \dots, k-1 \\ 1, & t \in ((2j+1)\pi/\nu, (2j+2)\pi/\nu], \forall j = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{T_k} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u_k(\tau) d\tau &= \sum_{j=0}^{k-1} \left( c \int_{2j\pi/\nu}^{(2j+1)\pi/\nu} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u_k(\tau) d\tau + \int_{(2j+1)\pi/\nu}^{(2j+2)\pi/\nu} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u_k(\tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \sum_{i=0}^{k-1} (e^{-\mu\pi/\nu} (e^{-(2i+1)\mu\pi/\nu} + e^{-2i\mu\pi/\nu}) - (e^{-(2i+2)\mu\pi/\nu} + e^{-(2i+1)\mu\pi/\nu})) = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно,  $\int_0^{T_k} e^{-\mu\tau} \cos \nu\tau u_k(\tau) d\tau = 0$ . Отже, (3.3) виконується для  $u_{T_k}(t) = u_k(t)$ . Отже, умова повернення у момент часу  $T_k = 2k\pi/\nu$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$  виконується.

Тепер ми доведемо, що початок координат не може бути повернуто допустимим керуванням взагалі у будь-який час  $T \neq T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Дійсно, нехай  $u(t)$  - довільне допустиме керування, тобто  $u(t) \in \{c, 1\}$ . Аргументуючи, як указано вище, отримуємо, що для будь-якого  $T \in (T_k, T_k + \pi/\nu]$ ,

$$\int_0^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau \geq \int_{T_k}^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau \geq c \int_{T_k}^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau d\tau > 0,$$

та  $\forall T \in (T_k + \pi/\nu, T_{k+1})$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau &\geq \int_{T_k}^{T_k + \pi/\nu} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau + \int_{T_k + \pi/\nu}^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau \\ &> c \int_{T_k}^{T_k + \pi/\nu} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau d\tau + \int_{T_k + \pi/\nu}^{T_{k+1}} e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau d\tau = 0. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\forall T \in (T_k, T_{k+1})$ , отримуємо  $\int_0^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau > 0$ , що суперечить (3.3). Отже, початок координат не повертається керуванням  $u(t)$  у

будь-який момент часу  $T \neq T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тоді умова повернення не виконується для жодного інтервалу. Отже, ця система не може бути нуль-керованою. Безпосередньо видно, що коли  $x_1 > 0$ , початок координат неможливо досягти з точок  $x = (x_1, x_2)$  будь-яким допустимим керуванням  $u(t)$  у будь-який час  $T > 0$ . Дійсно, рівність  $x_1 = -\int_0^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau$  не може виконуватись для  $x_1 > 0$  оскільки її права частина не додатна, як було показано вище.

**Приклад 2.** Нехай  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $e^{-\mu\pi/\nu} < c < 1$ . Аргументуючи, як у прикладі 1, отримуємо що  $\int_0^T e^{-\mu\tau} \sin \nu\tau u(\tau) d\tau > 0$ ,  $\forall T > 0$  та для будь-якого допустимого керування  $u(t)$ . Це означає, що для всіх таких  $c$  система не є нуль-керованою.

**Приклад 3.** Тепер розглянемо випадок  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $0 < c < 1$ , тобто

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad \Omega = \{c, 1\}, \quad 0 < c < 1. \quad (3.4)$$

Покажемо, що умова повернення на інтервалі  $[2\pi - 2\gamma, 2\pi]$  виконується, коли  $\gamma = \arctan((1-c)/\sqrt{c(2-c)})$ . У цьому випадку, рівність (3.3) приймає вигляд

$$\int_0^T \sin \tau * u_T(\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^T \cos \tau * u_T(\tau) d\tau = 0. \quad (3.5)$$

Нехай  $0 < T_1 < \pi < T_2 \leq T < 2\pi$ . Припустимо, що керування

$$u_T(t) = 1 \quad \text{для } 0 \leq t \leq T_1 \text{ або } T_2 \leq t \leq T, \\ u_T(t) = c \quad \text{для } T_1 < t < T_2, \quad (3.6)$$

повертає початок координат за час  $T$ . Умова (3.5) дає

$$\int_0^T \sin \tau * u_T(\tau) d\tau = -(1-c)(\cos T_1 - \cos T_2) - \cos T + 1 = 0, \\ \int_0^T \cos \tau * u_T(\tau) d\tau = (1-c)(\sin T_1 - \sin T_2) + \sin T = 0.$$

Тоді,

$$-(1-c) \sin \frac{T_1 - T_2}{2} \sin \frac{T_1 + T_2}{2} = \sin^2 \frac{T}{2} \quad (3.7a)$$

$$(1-c)\sin\frac{T_1-T_2}{2}\cos\frac{T_1+T_2}{2} = -\sin\frac{T}{2}\cos\frac{T}{2}. \quad (3.7b)$$

Отже,

$$\tan\frac{T_1+T_2}{2} = \tan\frac{T}{2}.$$

Оскільки  $0 < T_1 < \pi < T_2 \leq T < 2\pi$ , то  $T = T_1 + T_2$ . Далі, з (3.7) отримуємо

$$-(1-c)\sin\frac{T_1-T_2}{2} = \sin\frac{T_1+T_2}{2}.$$

$$\text{Тоді, } (-2+c)\tan\frac{T_1}{2} = c\tan\frac{T_2}{2};$$

$$\text{Отже, } T_2 = 2\pi - 2\arctan\left(\frac{2-c}{c}\tan\frac{T_1}{2}\right).$$

Отже, розв'язок системи (3.7) має вигляд

$$T = T_1 + T_2 = T_1 + 2\pi - 2\arctan\left(\frac{2-c}{c}\tan\frac{T_1}{2}\right).$$

Для  $T = 2\pi$ , встановимо  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = 2\pi$ ; тоді (3.7) виконується. Тепер розглянемо функцію

$$T = T(T_1) = T_1 + 2\pi - 2\arctan\left(\frac{2-c}{c}\tan\frac{T_1}{2}\right), \quad T_1 \in [0, \pi). \quad (3.8)$$

Диференціюючи (3.8) відносно  $T_1$ , отримуємо

$$\frac{dT}{dT_1} = \frac{2-c}{c} \frac{1 - \frac{2-c}{c}\tan^2\frac{T_1}{2}}{1 + \left(\frac{2-c}{c}\right)^2 \tan^2\frac{T_1}{2}} < 0, \quad 0 \leq \tan\frac{T_1}{2} < \sqrt{\frac{c}{2-c}}.$$

Отже, неперервна функція (3.8) спадає на відрізку  $[0, 2\arctan\sqrt{\frac{c}{2-c}}]$  від  $2\pi$  до

$2\pi - 2\gamma$ . Таким чином,  $\forall T \in [2\pi - 2\gamma, 2\pi]$ , існує керування виду (3.6), яке повертає початок координат в момент часу  $T$ . Отже, умова повернення на

інтервалі  $[2\pi - 2\gamma, 2\pi]$  виконується. Оскільки  $\text{int } M_{1,0} \neq \emptyset$ , система (3.4) є нуль-керованою.

Цей цікавий приклад показує, що навіть якщо керування приймає два досить близьких значення (значення  $c$  може бути досить близьким до 1), система (3.4) є нуль-керованою. У випадку  $c = 1$  система (3.4) некерована, але початок координат повертається за час  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Більш того, завдяки теоремі 2 [3] система (3.4) є глобально керованою.

**Теорема 2[3].** Нехай  $\Omega$  є обмеженою множиною і нехай система  $\dot{x} = Ax + \varphi(u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$  нуль-керована. Тоді, ця система – глобально нуль-керована тоді і тільки тоді, коли дійсні частини власних значень матриці  $A$  недодатні.

Зауважимо, що у випадку  $c = 0$  система (3.4) також є керованою.

**Приклад 4.** Тепер встановимо  $\mu = 1/2\pi$ ,  $\nu = 1$ . Тут розглянемо випадок, коли  $\Omega$  дорівнює відріжку  $[c, 3]$ ,  $0 < c < 1$  - фіксоване, тобто

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2\pi} x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{2\pi} x_2 + u, \quad \Omega = [c, 3]. \quad (3.9)$$

У цьому випадку (3.3) приймає вигляд

$$\int_0^T e^{-\tau/2\pi} \sin \tau u_T(\tau) d\tau = \int_0^T e^{-\tau/2\pi} \cos \tau u_T(\tau) d\tau = 0. \quad (3.10)$$

Оберемо керування  $\tilde{u}_T(t) = e^{t/2\pi} u_T(t)$ , де функція  $u_T(t)$  має вигляд (3.6). Тоді,  $\tilde{u}_T(t)$  є допустимим, оскільки  $c \leq \tilde{u}_T(t) \leq e < 3$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . Підставляючи керування  $\tilde{u}_T(t)$  замість  $u_T(t)$  у (3.10), отримуємо (3.5). Таким чином, приклад 4 демонструє, що  $\tilde{u}(t)$  повертає початок координат у будь-який час  $T \in [2\pi - 2\gamma, 2\pi]$ ,  $\gamma = \arctan((1-c)/\sqrt{c(2-c)})$ . Оскільки  $\text{int } M_{1,0} \neq \emptyset$ , то система (3.9) нуль-керована. Аналогічно, у випадку  $\mu = -1/2\pi$ ,  $\nu = 1$ ,  $\Omega = [1/3, 1]$ , система (3.2) нуль-керована.

**Приклад 5.** Нарешті, розглянемо чотиривимірну систему

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2, \quad \dot{x}_4 = x_3, \quad \Omega = \{c, 1\}.$$

Покажемо, що для будь-якого  $c < 0$  умова повернення на будь-якому відрізку виконується (легко побачити, що при  $c > 0$  умова повернення не виконується, оскільки  $\dot{x}_1(t) = u(t) > 0$ ,  $\forall t > 0$ ). Для цього ми фіксуємо  $\theta > 0$  і показуємо, що існує допустиме керування, що повертає початок координат у момент часу  $\theta$ . Розглянемо кусково-постійне керування,

$$u(t) = c, \quad t \in [t_1, t_2) \cup [t_3, t_4), \quad (3.11a)$$

$$u(t) = 1, \quad t \in [0, t_1) \cup [t_2, t_3) \cup [t_4, \theta], \quad (3.11b)$$

де  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \theta$ . Умова повернення у момент часу  $\theta$  означає, що

$$\int_0^\theta \tau^{k-1} u(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Підставивши  $u(t)$  у (3.11a), (3.11b), отримуємо

$$t_1^k - t_2^k + t_3^k - t_4^k = -\theta^k / (1 - c), \quad k = 1, \dots, 4.$$

Поділивши обидві частини на  $\theta^k$  та ввівши позначення  $T_i = t_i / \theta$ ,  $i = 1, \dots, 4$  і  $a = -1 / (1 - c)$ , отримуємо систему

$$T_1^k - T_2^k + T_3^k - T_4^k = a, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Ця система має розв'язок

$$T_1 = (6 + 3a - \sqrt{3}\sqrt{4 - a^2}) / 12,$$

$$T_2 = (6 - 3a - \sqrt{3}\sqrt{4 - a^2}) / 12,$$

$$T_3 = (6 + 3a + \sqrt{3}\sqrt{4 - a^2}) / 12,$$

$$T_4 = (6 - 3a + \sqrt{3}\sqrt{4 - a^2}) / 12.$$

Легко переконатися, що якщо  $|a| < 1$ , то ці значення задовольняють нерівності  $0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < 1$  (що еквівалентно  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \theta$ ). Оскільки  $a = -1 / (1 - c)$ , то потрібний розв'язок існує, якщо  $|1 - c| > 1$ , що справедливо для будь-якого  $c < 0$ . Таким чином, для будь-якого  $\theta > 0$ , кусково-постійне керування (3.11), де  $t_i = T_i \theta$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , повертає початок координат у момент часу  $\theta$ . Це означає, що умова повернення виконується на будь-якому відрізку.

## 4. Рівняння Ейлера

В цьому розділі ми нагадаємо властивості рівняння Ейлера, яке буде використане пізніше.

Рівнянням Ейлера називається рівняння

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad (4.1)$$

де  $a_i, i = 1, \dots, n$ , - дійсні постійні. Формально це рівняння є рівнянням зі змінними коефіцієнтами. Проте, за допомогою заміни незалежної змінної

$$x = e^t, \quad t = \ln x \text{ при } x > 0 \quad (x = -e^t \text{ при } x < 0), \quad (4.2)$$

воно призводить до рівняння з постійними коефіцієнтами. Справді, обчислюючи похідні, отримуємо

$$y'(x) = y'(t) \frac{dt}{dx} = y'(t) \frac{1}{x},$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left( y'(t) \frac{1}{x} \right) = y''(t) \frac{dt}{dx} \frac{1}{x} - y'(t) \frac{1}{x^2} = (y''(t) - y'(t)) \frac{1}{x^2},$$

$$y'''(x) = (y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)) \frac{1}{x^3},$$

...

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n)}(t) + \dots) \frac{1}{x^n}$$

(у виразі для  $y^{(n)}(x)$  багатокрапкою позначено лінійну комбінацію  $y^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , з постійними коефіцієнтами). Підставивши ці похідні у (4.1), отримуємо рівняння з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = f(e^t)$$

**Приклад.**  $x^2 y'' - 2y = \ln x$ .

**Розв'язок.** Заміна (4.2) приводить до рівняння

$$y'' - y' - 2y = t.$$

Корені характеристичного багаточлена  $L(p) = p^2 - p - 2$  дорівнюють  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = 2$ . Часний розв'язок отриманого рівняння шукаємо у вигляді  $\hat{y} = \tilde{P}_m(x)$ , де  $\tilde{P}_m(x)$  - багаточлен степеню  $m$  від  $x$  з невизначеними коефіцієнтами.

А саме,  $\hat{y}(t) = at + b$ . Прирівнявши коефіцієнти при степенях  $t$  у рівності  $-a - 2(at + b) = t$ , отримаємо  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ .

Отже,  $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ . Зробивши зворотну заміну, отримаємо

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4}.$$

Якщо у рівнянні (4.1) при  $y^{(k)}(x)$  замість  $x^k$  стоїть множник  $(ax + b)^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то таке рівняння називається *рівнянням Лагранжа*. За допомогою заміни  $ax + b = e^t$  воно також зводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами.

## 5. Задача позиційного синтезу обмеженого керування

У цьому розділі ми знайдемо розв'язок задачі позиційного синтезу обмеженого керування у аналітичній формі та представимо траєкторію у явному вигляді.

Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x, u),$$

де  $x \in Q \subset R^n$ ,  $u \in \Omega \subset R^r$ , при чому  $\Omega$  таке, що  $0 \in \text{int } \Omega$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

**Визначення.** Під локальним позиційним синтезом обмеженого керування будемо розуміти знаходження такого керування  $u = u(x)$ ,  $x \in Q$ , що:

- 1)  $u(x) \in \Omega$ ;
- 2) траєкторія  $x(t)$  замкненої системи  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , яка починається у довільній початковій точці  $x_0 \in Q$ , закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ .



Розглянемо задачу синтезу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u \end{cases} \quad (5.1)$$

з початковою умовою

$$x(0) = x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

при обмеженні на керування  $|u| \leq 2$ .

$$\text{Тут } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення системи

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2; 1.$$

Роблячи заміну керування  $v = 2x_1 - x_2 + u$ , ми вимагаємо, щоб  $|2x_1 - x_2| \leq 1$  та  $|u| \leq 1$ , тоді  $|v| \leq 2$ , а отже ми отримуємо, що система (5.1) разом з початковими даними має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Де

$$\begin{cases} x_1^0 = x_1^0 \\ x_2^0 = x_1^0 - x_2^0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Позначимо  $x = (x_1, x_2)$ .

Далі ми використаємо метод функції керованості, запропонований В. І. Коробовим у роботі [5], і детально викладений у книзі [4].

Розглянемо систему (5.2). Оберемо  $a = (a_1, a_2)^* = (-6, -3)^*$ .

Дійсне число  $a$  обираємо таким чином, щоб рівняння  $\lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - \dots - a_1 = 0$  мало корені з від'ємними дійсними частинами і тоді нульовий розв'язок системи буде асимптотично стійким.

Тоді допоміжне керування  $v(x)$  має вигляд  $v(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$  і нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

асимптотично стійкий. У цьому випадку

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Задаємо додатно визначену матрицю

$$W_1 = \begin{pmatrix} 144 & 36 \\ 36 & 12 \end{pmatrix}$$

Додатно визначена матриця  $F_1 = \begin{pmatrix} f_{11}^1 & f_{12}^1 \\ f_{21}^1 & f_{22}^1 \end{pmatrix}$  є розв'язком рівняння

$F_1 A_{11} + A_{11}^* F_1 = -W_1$  і її елементи знаходяться з системи

$$\begin{cases} -6f_{12}^1 - 6f_{21}^1 = -144 \\ f_{11}^1 - 3f_{12}^1 - 6f_{22}^1 = -36 \\ f_{11}^1 - 3f_{21}^1 - 6f_{22}^1 = -36 \\ f_{12}^1 + f_{21}^1 - 6f_{22}^1 = -12 \end{cases}$$

і дорівнюють  $f_{11}^1 = 36$ ,  $f_{12}^1 = f_{21}^1 = 12$ ,  $f_{22}^1 = 6$ .

Тобто  $F_1 = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ .

Нехай  $m_1 = n_1$ , тобто  $m_1 = 2$ , а число  $\alpha_1 = 1$ . Тоді матриця  $F_1^1$  вигляду

$F_1^1 = \begin{pmatrix} 144 & 36 \\ 36 & 12 \end{pmatrix}$  додатно визначена.

Позначимо

$$D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

тоді функція керованості є єдиним додатнім розв'язком цього рівняння

$$2a_0\Theta^4 - 6\Theta^2x_2^2 - 24\Theta x_1x_2 - 36x_1^2 = 0 \quad (5.4)$$

**Теорема (Коробов, Скляр, 1990) [11].**

Визначимо функцію керованості  $\Theta = \Theta(x)$  як єдиний додатній розв'язок рівняння

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x), \quad x \neq 0,$$

$$0 < a_0 \leq \frac{2}{f_m},$$

$$D(\Theta) = \text{diag} \left( \Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^n,$$

$$F = \left( \int_0^1 (1-t)e^{-A_0t} b_0 b_0^* e^{-A_0^*t} dt \right)^{-1}.$$

Тоді керування

$$u(x) = -\frac{1}{2} b_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) x$$

розв'язує задачу глобального позиційного синтезу. Виконується рівність виду  $\dot{\Theta}(x) = -1$ , тобто функція керованості є часом руху з довільної початкової точки  $x_0 \in R^n$  до початку координат.

Підставив у це рівняння початкові умови (5.3), отримуємо початкову умову  $\Theta^0 = \Theta(0)$ . Запишемо умови для  $a_0$ . Нехай  $C_1 = 1$ , отже, будемо шукати

розв'язок задачі позиційного синтезу обмеженого керування в області  $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$ . Тоді оскільки  $N_D = 1$ , то умова для обирання числа  $a_0$  приймає вигляд

$$(2a_0(F_1^{-1}a, a))^{\frac{1}{2}} + \|B_0^* \tilde{A}\| (2a_0 \|F_1^{-1}\|)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

$$\text{Оскільки } F_1^{-1}a = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(F_1^{-1}a, a) = 1,$$

$$B_0^* \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B_0^* \tilde{A}\| = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sqrt{5},$$

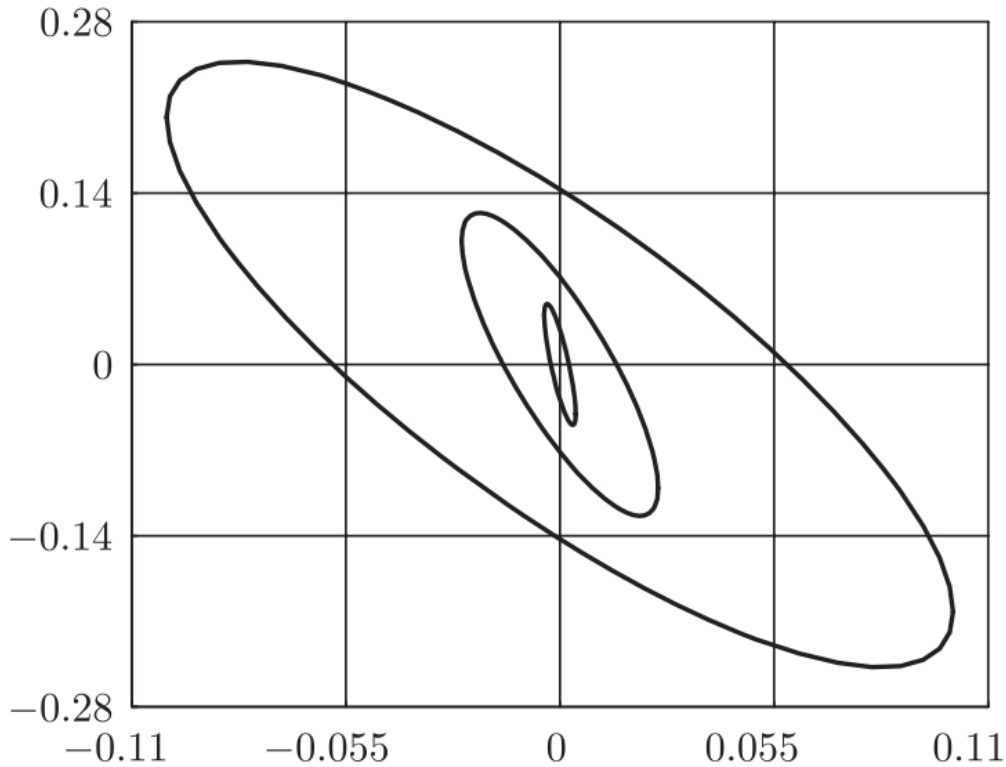
тут  $\lambda_{\max}$  - найбільше власне значення матриці  $(\tilde{A}^* B_0 B_0^* \tilde{A})$ ,

$$\|F_1^{-1}\| = \lambda_{\max}(F_1^{-1}) = (13 + \sqrt{157}) / 72$$

Отримуємо

$$a_0 \leq \frac{3}{5} (991 - 79\sqrt{157} - \sqrt{1961592 - 156552\sqrt{157}}) \approx 0.0612696$$

Оберемо  $a_0 = 0.06126$ . Тоді з рівності (5.4), поклавши послідовно  $\Theta = 1$ ,  $\Theta = 0.5$ ,  $\Theta = 0.2$ , отримуємо відповідні границі областей, що є еліпсами, з точок яких можна потрапити у нуль за траєкторіями системи (5.2) за допомогою керування  $v(x)$  за час  $\Theta = 1$  (найбільший еліпс),  $\Theta = 0.5$  (середній еліпс),  $\Theta = 0.2$  (найменший еліпс).



Мал. 10. Лінії рівня функції  $\Theta(x_1, x_2)$

Керування має вигляд

$$v(x_1, x_2) = \frac{a_1 x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta(x_1, x_2)} = -\frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}$$

Похідна функції керованості  $\Theta(x)$  відповідно, в силу обчислень вище, задається рівнянням

$$\dot{\Theta} = -\frac{(W_1 D(\Theta)x, D(\Theta)x)}{(F_1^1 D(\Theta)x, D(\Theta)x)} \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_1}} = -1$$

З цієї рівності витікає, що функція  $\Theta(x_1, x_2)$  є часом руху з точки  $x = (x_1, x_2)$  у точку  $(0,0)$  за траєкторією системи (5.2) з керуванням  $v(x)$ . Після інтегрування цих диференціальних рівнянь отримуємо  $\theta(t) \equiv \Theta(x_1(t), x_2(t)) = \Theta^0 - t$ .

Знайдемо траєкторію системи (5.2) з точки  $(x_1^0, x_2^0)$  у точку  $(0,0)$  з керуванням  $v(x)$ . Для цього розглянемо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{(\Theta^0 - t)^2} - \frac{3x_2}{\Theta^0 - t} \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Звідки отримуємо

$$(\Theta^0 - t)^2 \ddot{x}_1 + 3(\Theta^0 - t)\dot{x}_1 + 6x_1 = 0.$$

Зробимо заміну часу  $\Theta^0 - t = e^\tau$  та позначимо через  $y_1(\tau) = x_1(\Theta^0 - e^\tau)$ .

Оскільки  $\dot{x}_1(t) = -y_1'(\tau)e^{-\tau}$ ,  $\ddot{x}_1(t) = (y_1''(\tau) - y_1'(\tau))e^{-2\tau}$ ,

де штрих значить похідну за  $\tau$ , то це диференціальне рівняння типу Ейлера зводиться до диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами виду

$$y_1''(\tau) - 4y_1'(\tau) + 6y_1(\tau) = 0$$

розв'язок якого задається формулою

$$y_1(\tau) = k_1 e^{2\tau} \cos(\sqrt{2}\tau) + k_2 e^{2\tau} \sin(\sqrt{2}\tau)$$

Тепер повертаємось до змінної  $t$

$x_1(t) = (\Theta^0 - t)^2 [k_1 \cos \mu(t) + k_2 \sin \mu(t)]$ , де  $\mu(t) = \sqrt{2} \ln(\Theta^0 - t)$ ,  $k_1, k_2$  - деякі постійні. Звідси шляхом диференціювання функції  $x_1(t)$  знаходимо функцію

$$x_2(t) = (\Theta^0 - t) \left[ (-2k_1 - \sqrt{2}k_2) \cos \mu(t) + (\sqrt{2}k_1 - 2k_2) \sin \mu(t) \right].$$

Постійні  $k_1, k_2$  знаходяться з початкових умов

$$(\Theta^0)^2 [k_1 \cos(\sqrt{2} \ln \Theta^0) + k_2 \sin(\sqrt{2} \ln \Theta^0)] = x_1^0$$

$$(\Theta^0) \left[ (-2k_1 - \sqrt{2}k_2) \cos(\sqrt{2} \ln \Theta^0) + (\sqrt{2}k_1 - 2k_2) \sin(\sqrt{2} \ln \Theta^0) \right] = x_2^0$$

і мають вигляд

$$k_1 = \left[ \sqrt{2}x_1^0 \cos(\sqrt{2} \ln \Theta^0) + (2x_1^0 + x_2^0 \Theta^0) \sin(\sqrt{2} \ln \Theta^0) \right] / (\sqrt{2}(\Theta^0)^2)$$

$$k_2 = \left[ -(2x_1^0 + x_2^0 \Theta^0) \cos(\sqrt{2} \ln \Theta^0) + \sqrt{2}x_1^0 \sin(\sqrt{2} \ln \Theta^0) \right] / (\sqrt{2}(\Theta^0)^2)$$

Тоді

$$\begin{aligned}x_1(t) &= (\Theta^0 - t)^2 \left[ \sqrt{2}x_1^0 \cos \gamma(t) - (2x_1^0 + x_2^0\Theta^0) \sin \gamma(t) \right] / (\sqrt{2}(\Theta^0)^2) \\x_2(t) &= (\Theta^0 - t) \left[ x_2^0\Theta^0 \cos \gamma(t) + \sqrt{2}(3x_1^0 + x_2^0\Theta^0) \sin \gamma(t) \right] / (\Theta^0)^2\end{aligned}, \quad (5.5)$$

де  $\gamma(t) = \sqrt{2} \ln(1 - t / \Theta^0)$ . В силу рівностей (5.5) керування  $v(x_1, x_2)$  на траєкторії  $(x_1(t), x_2(t))$  має вигляд

$$v(t) = - \left[ (6x_1^0 + 3x_2^0\Theta^0) \cos \gamma(t) + 3\sqrt{2}x_1^0 \sin \gamma(t) \right] / (\Theta^0)^2$$

Розглянемо задачу при різних початкових точках:

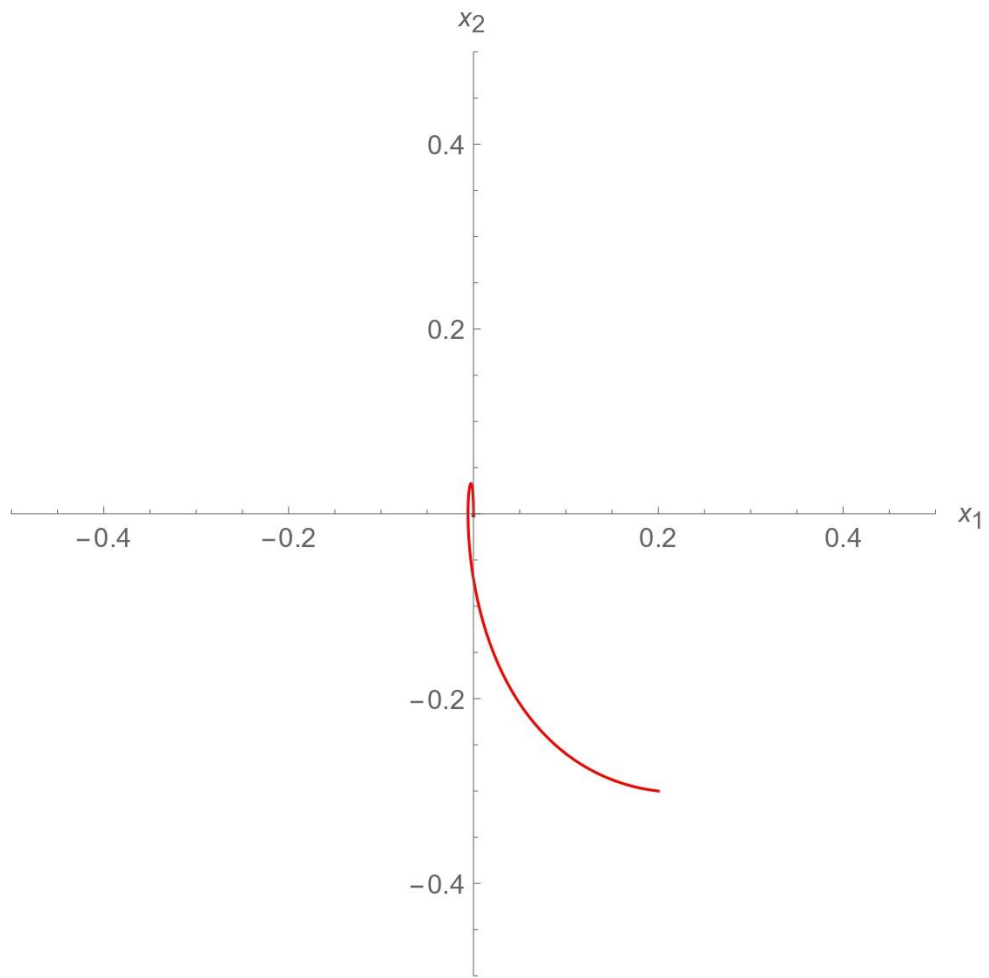
$$1) \quad \begin{aligned}x_1^0 &= 0.2 \\x_2^0 &= -0.3\end{aligned}$$

Єдиний додатний корінь рівняння на функцію керованості:  $\Theta^0 = 1.40915$ .

Траєкторія є розв'язком задачі Коші

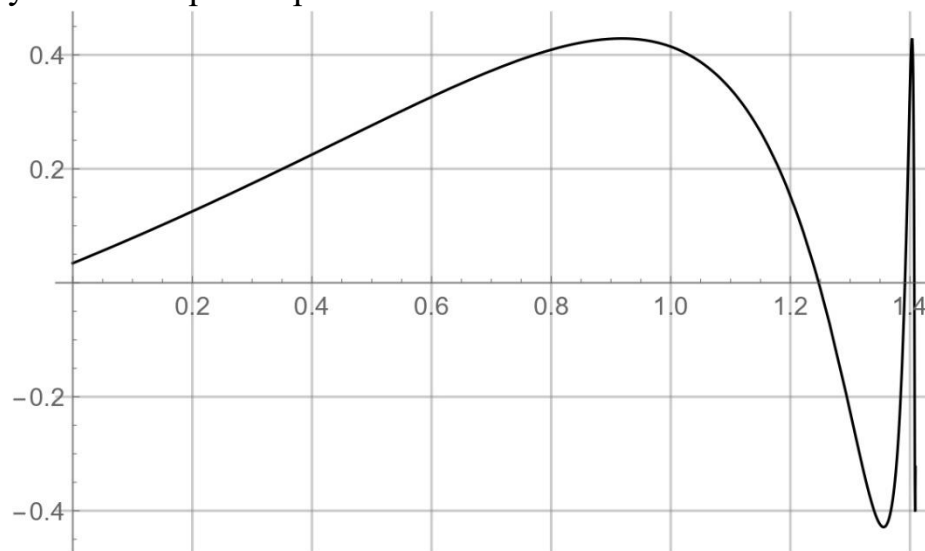
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{(\Theta^0 - t)^2} - \frac{3x_2}{\Theta^0 - t} \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Траєкторія показана на Мал. 11:



Мал. 11

Графік керування на траєкторії показаний на Мал. 12:



Мал. 12



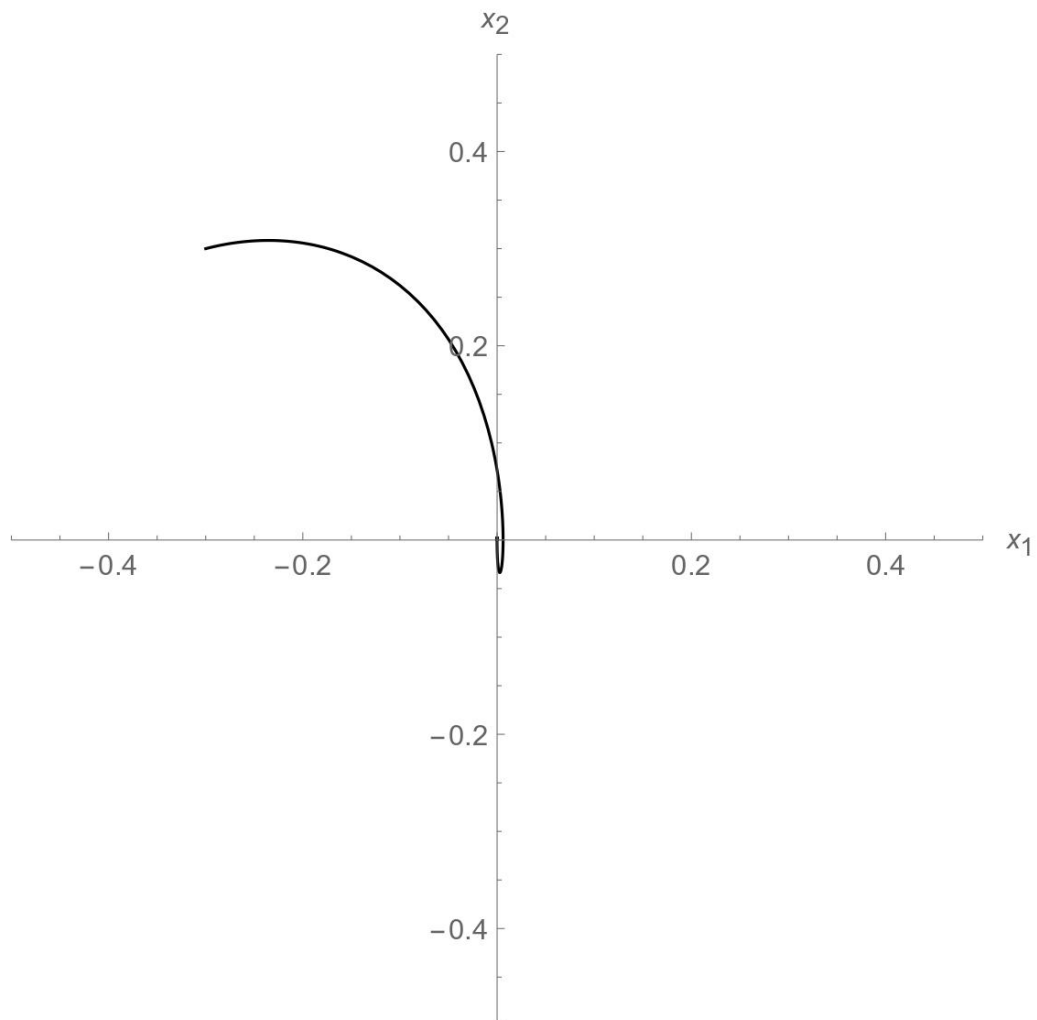
$$2) \begin{cases} x_1^0 = -0.3 \\ x_2^0 = 0.3 \end{cases}$$

Єдиний додатній корінь рівняння на функцію керованості:  $\Theta^0 = 1.73771$ .

Траєкторія є розв'язком задачі Коші

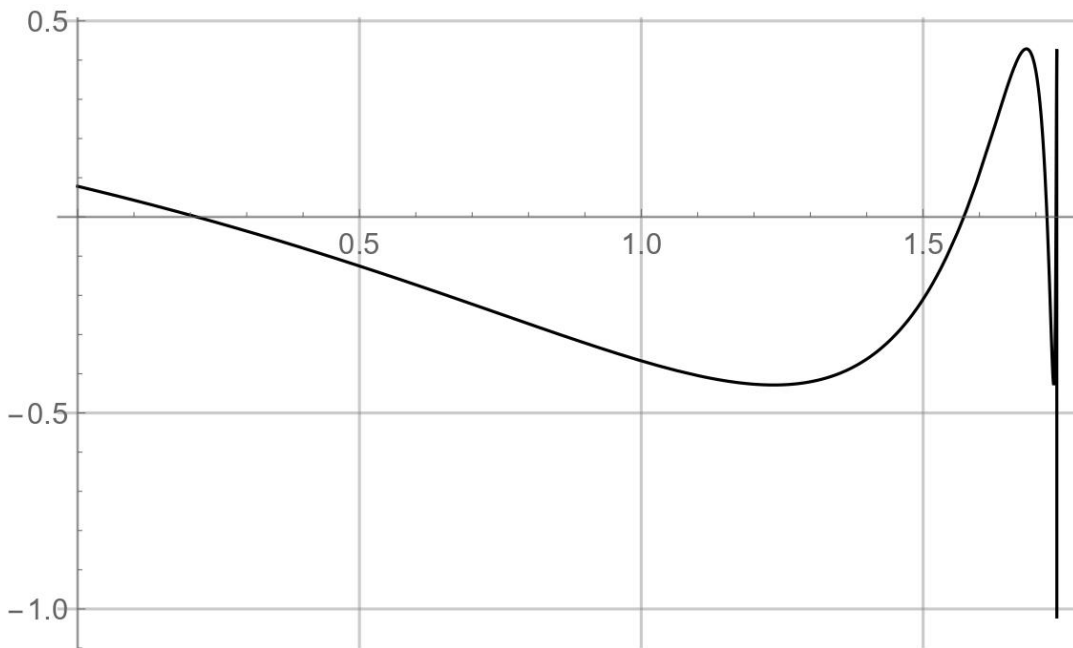
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{6x_1}{(\Theta^0 - t)^2} - \frac{3x_2}{\Theta^0 - t} \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Траєкторія показана на Мал. 13:



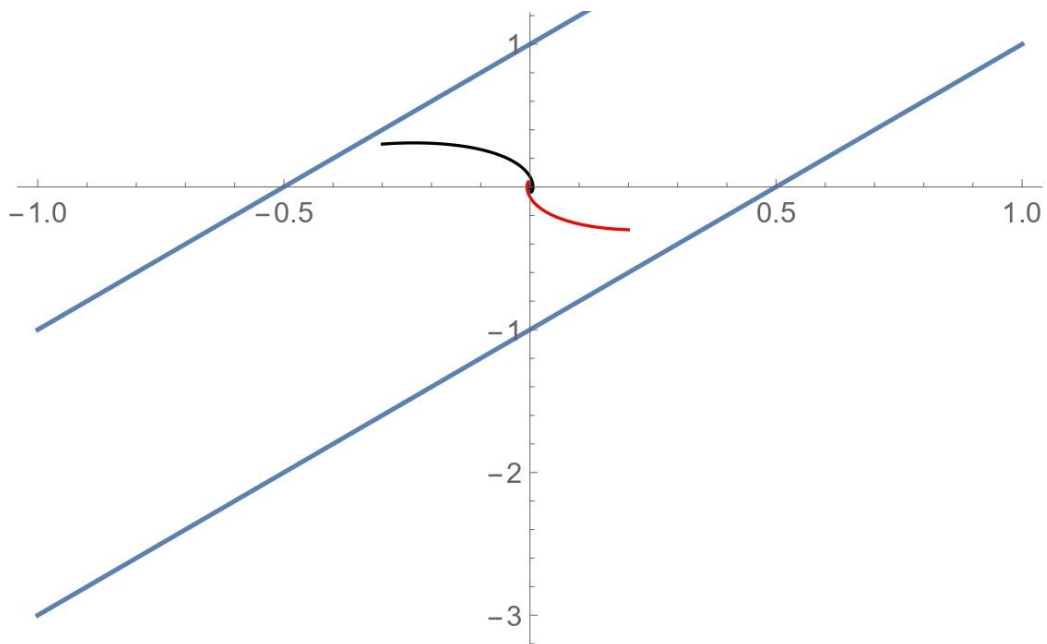
Мал. 13

Графік керування на траєкторії показаний на Мал. 14:



Мал. 14

На Мал. 15 показано дві траєкторії, отримані при різних початкових точках, до того ж вони задовольняють обмеженню на фазові координати.



Мал. 15

Отже, ми досягли поставленої нами мети, тобто, знайшли розв'язок задачі позиційного синтезу обмеженого керування у аналітичній формі та представили траєкторію розв'язку задачі Коші у явному вигляді.

## 6. Функція керованості як час руху у випадку матриці інтегрального вигляду

Приведемо один з методів побудування функції керованості для канонічної системи  $\dot{x} = A_0x + b_0u$ , що визначається з рівняння  $2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$ ,  $a_0 > 0$ , у якому матриця  $F$  задовольняє рівності  $FA_1 + A_1^*F = -W$  при  $W = F^1$ , тобто  $FA_1 + A_1^*F = -F^1$ ,

(6.1)

$$\text{де } A_1 = A_0 + b_0a^* \text{ - матриця виду } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

матриця  $F^1$  визначається співвідношенням

$$F^\alpha \equiv F - H^\alpha F - FH^\alpha = \left( \left(1 + \frac{n+m-i-j+1}{\alpha}\right) f_{ij} \right)_{i,j=1}^n \quad \text{при } \alpha = 1, \quad \text{причому}$$

матриця  $F^{-1}$  буде мати інтегральне зображення виду

$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t)e^{-A_0t} b_0 b_0^* e^{-A_0^*t} dt \quad (6.2)$$

Такий метод був запропонований у роботі [4].

У цьому випадку функція керованості є часом руху.

Покажемо, що існують числа  $a_1, \dots, a_n$  такі, що рівність (6.1) справедлива для додатно визначених матриць  $F$ . Так як  $F^1 = F - HF - FH$ , де

$$H = \text{diag} \left( -\frac{2n-2i+1}{2} \right)_{i=1}^n, \text{ то рівність (6.1) приймає вигляд}$$

$$F(A_1 + \frac{1}{2}E - H) + (A_1^* + \frac{1}{2}E - H)F = 0, \quad (6.3)$$

де  $E$  - одинична матриця. Оберемо вектор  $a$  згідно рівності  $a = -\frac{1}{2}Fb_0$ . Тоді з рівності (6.3) маємо

$$F(A_0 + \frac{1}{2}E - H) + (A_0^* + \frac{1}{2}E - H)F = Fb_0b_0^*F,$$

звідки маємо

$$(A_0 + \frac{1}{2}E - H)F^{-1} + F^{-1}(A_0^* + \frac{1}{2}E - H) = b_0b_0^*. \quad (6.4)$$

Покажемо, що рівняння (6.4) має розв'язок у вигляді додатно визначеної матриці  $F^{-1}$ .

Позначимо через  $G$  матрицю, що задається рівністю  $G = \frac{1}{2}E - H$ , та перепишемо (6.4) у вигляді

$$(A_0 + G)F^{-1} + F^{-1}(A_0^* + G) = b_0b_0^*. \quad (6.5)$$

Помножив рівність (6.5) зліва на матрицю  $e^{-(A_0+G)t}$ , а справа на матрицю  $e^{-(A_0^*+G)t}$  з урахуванням комутативності матриці зі своєю експонентою, отримуємо

$$\frac{d}{dt} e^{-(A_0+G)t} F^{-1} e^{-(A_0^*+G)t} = -e^{-(A_0+G)t} b_0b_0^* e^{-(A_0^*+G)t}. \quad (6.6)$$

Проінтегруємо рівність (6.6) за  $t$  у границях від 0 до  $\infty$ . Так як матриця

$$-(A_0 + G) = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

є стійкою, то

$$F^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-(A_0+G)t} b_0b_0^* e^{-(A_0^*+G)t} dt. \quad (6.7)$$

Покажемо, що матрицю  $F^{-1}$ , задану формулою (6.7), можна зобразити у вигляді (6.2). Для цього проведемо більш загальні міркування з метою отримання сімейства матриць  $F^{-1}(\Theta)$ , яке при  $\Theta = 1$  містить матрицю  $F^{-1}$ . Помножив рівність (6.5) зліва і справа на матрицю  $D^{-1}(\Theta)$ , з урахуванням рівності  $D^{-1}(\Theta)GD(\Theta) = G$  і рівності  $F(\Theta) = D(\Theta)FD(\Theta)$  отримуємо

$$(D^{-1}(\Theta)A_0D(\Theta) + G)F^{-1}(\Theta) + F^{-1}(\Theta)(D(\Theta)A_0^*D^{-1}(\Theta) + G) = D^{-1}(\Theta)b_0b_0^*D^{-1}(\Theta). \quad (6.8)$$

З виду матриць  $D(\Theta)$ ,  $A_0$  та вектора  $b_0$  витікає, що

$$D^{-1}(\Theta)A_0D(\Theta) = \Theta A_0,$$

$$D^{-1}(\Theta)b_0b_0^*D^{-1}(\Theta) = \Theta b_0b_0^*.$$

Використовуючи ці рівності, з (6.8) маємо

$$(\Theta A_0 + G)F^{-1}(\Theta) + F^{-1}(\Theta)(\Theta A_0^* + G) = \Theta b_0b_0^*,$$

звідки, як і раніше, отримуємо

$$F^{-1}(\Theta) = \int_0^{\infty} e^{-(\Theta A_0 + G)t} \Theta b_0b_0^* e^{-(\Theta A_0^* + G)t} dt. \quad (6.9)$$

Покажемо, що матрицю  $F^{-1}(\Theta)$  можна зобразити у вигляді

$$F^{-1}(\Theta) = \int_0^{\Theta} \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right) e^{-A_0 t} b_0b_0^* e^{-A_0^* t} dt. \quad (6.10)$$

Дійсно, позначимо для довільних матриць  $A$  та  $B$  вираз  $[A, B] = AB - BA$  та  $ad_B^{k+1} A = [B, ad_B^k A]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $ad_B^0 A = A$ .

Зобразимо матрицю  $e^{-(\Theta A_0 + G)t}$  у вигляді

$$e^{-(\Theta A_0 + G)t} = e^{-Gt} \exp\left(\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^k}{k!} ad_{-G}^k(-\Theta A_0) d\tau\right). \quad (6.11)$$

Так як  $ad_{-G}^k(-\Theta A_0) = (-1)^{k+1} \Theta A_0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,

$$\text{то } \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^k}{k!} ad_{-G}^k(-\Theta A_0) d\tau = -\Theta A_0 (e^t - 1)$$

та рівність (6.11) приймає вигляд  $e^{-(\Theta A_0 + G)t} = e^{-Gt} e^{-\Theta A_0 (e^t - 1)}$ .

На основі останньої рівності з (6.9) отримуємо

$$F^{-1}(\Theta) = \int_0^{\infty} e^{-Gt} e^{-\Theta A_0 (e^t - 1)} \Theta b_0 b_0^* e^{-\Theta A_0^* (e^t - 1)} e^{-Gt} dt.$$

Нехай  $\psi(\tau) = 1 - \tau/\Theta$ , після заміни змінної  $t$  на  $-\ln\psi(\tau)$  та використання рівності

$$e^{G \ln\psi(\tau)} = \psi^{\frac{1}{2}}(\tau) e^{-H \ln\psi(\tau)}$$

маємо

$$F^{-1}(\Theta) = \int_0^{\Theta} e^{-H \ln\psi(\tau)} e^{-A_0 \frac{\tau}{\psi(\tau)}} b_0 b_0^* e^{-A_0^* \frac{\tau}{\psi(\tau)}} e^{-H \ln\psi(\tau)} d\tau. \quad (6.12)$$

Так як

$$e^{-H \ln\psi(\tau)} = \text{diag} \left( \psi^{\frac{2n-2i+1}{2}}(\tau) \right)_{i=1}^n,$$

$$e^{-A_0 \frac{\tau}{\psi(\tau)}} b_0 b_0^* e^{-A_0^* \frac{\tau}{\psi(\tau)}} = \left( \frac{(-1)^{2n-i-j} \tau^{2n-i-j}}{(n-i)!(n-j)! \psi^{2n-i-j}(\tau)} \right)_{i,j=1}^n,$$

а отже,

$$e^{-H \ln\psi(\tau)} e^{-A_0 \frac{\tau}{\psi(\tau)}} b_0 b_0^* e^{-A_0^* \frac{\tau}{\psi(\tau)}} = \psi(\tau) e^{-A_0 \tau} b_0 b_0^* e^{-A_0^* \tau},$$

то з рівності (6.12) отримуємо інтегральне зображення (6.10) матриці  $F^{-1}(\Theta)$ .

Обчислимо матрицю  $F^{-1}(\Theta)$ . З рівності (6.10) отримуємо

$$F^{-1}(\Theta) = \left( \frac{(-1)^{2n-i-j} \Theta^{2n-i-j+1}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)(2n-i-j+2)} \right)_{i,j=1}^n, \quad (6.13)$$

Із зображення (6.10) для матриці  $F^{-1}(\Theta)$  та з умови  $\text{rang}(b_0, \dots, A_0^{n-1} b_0) = n$  витікає її додатна визначеність, а отже, додатна визначеність і матриці  $F(\Theta)$ .

Задамо керування  $u(x)$  формулою

$$u(x) = -\frac{1}{2} b_0^* F(\Theta(x)) x. \quad (6.14)$$

Маємо наступну теорему, яка була отримана у роботі [4].

**Теорема [4].** Нехай число  $a_0$  задовольняє нерівності

$$0 < a_0 \leq \frac{d^2}{2(F^{-1}a, a)} = \frac{2d^2}{f_m}. \quad (6.15)$$

Тоді керування  $u(x)$  виду (6.14) розв'язує задачу глобального позиційного синтезу неперервного керування, причому  $\Theta(x_0)$  - час руху з точки  $x_0$  у початок координат.

**Доведення.** Позначимо  $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$  та перепишемо керування (6.15) у вигляді  $u(x) = (a, y(\Theta(x), x))\Theta^{-\frac{1}{2}}(x)$ .

Встановимо обмеження керування для будь-якого  $x \in R^n$ . Для цього при фіксованому  $\Theta$  розв'яжемо задачу пошуку екстремуму функції  $(a, y(\Theta, x))\Theta^{-\frac{1}{2}}$  при обмеженнях  $(Fu(\Theta, x), y(\Theta, x)) - 2a_0\Theta = 0$ . Задачу розв'язуємо за допомогою множників Лагранжа. Функція Лагранжа має вигляд

$$L(y(\Theta, x), \lambda) = (a, y(\Theta, x))\Theta^{-\frac{1}{2}} - \lambda(Fu(\Theta, x), y(\Theta, x)) + 2\lambda a_0\Theta.$$

Нехай  $y^0$  - точка екстремуму. Необхідні умови екстремуму дають

$$y^0 = \frac{1}{2\lambda}\Theta^{-\frac{1}{2}}F^{-1}a, \text{ де } a = -\frac{1}{2}Fb_0. \text{ Підставляя } y^0 \text{ у обмеження, отримуємо}$$

$$\frac{1}{2\lambda} = \sqrt{2a_0/(F^{-1}a, a)\Theta}.$$

Тому маємо

$$(a, y^0)\Theta^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} = \pm\sqrt{a_0f_m/2},$$

звідки, враховуючи нерівність (6.15) отримуємо

$$|u(x)| \leq d, \quad x \in R^n,$$

тобто керування здійснює розв'язок задачі синтезу у всьому просторі.

**Зауваження.** При розв'язку задачі синтезу для канонічної системи число  $a_0$  будемо обирати рівним  $2d^2/f_{nn}$ .

Розглянемо питання знаходження траєкторії, що веде з точки  $x_0$  до початку координат. Для цього необхідно знайти додатній корінь  $\Theta_0 = \Theta(x_0)$  рівняння  $2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$ , тобто додатній корінь рівняння

$$2a_0\Theta^{2n} = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}\Theta^{i+j-2}x_i^0x_j^0.$$

Корінь  $\Theta_0 = \Theta(x_0)$  є часом руху  $T(x_0)$  з точки  $x_0$  у точку  $x = 0$ . Нехай  $x_{n+1}(t) = \Theta(x(t))$ . Тоді маємо задачу Коші

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{f_{ni}x_i}{x_{n+1}^{n-i+1}}, \dot{x}_{n+1} = -1 \quad (6.16)$$

$$x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0, x_{n+1}(0) = \Theta_0$$

Так як з (6.16) витікає, що  $x_{n+1}(t) = \Theta_0 - t$ , то траєкторія  $x(t)$  є розв'язком наступної задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{f_{ni}x_i}{(\Theta_0 - t)^{n-i+1}}, \\ x_1(0) = x_1^0, \dots, x_{n-1}(0) = x_{n-1}^0, x_n(0) = x_n^0 \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f_{n,i+1}x_1^{(i)}(\Theta_0 - t)^i &= 0, \\ x_1^{(i)}(0) &= x_{i+1}^0, i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

де  $f_{n,n+1} = 2$ . Це диференціальне рівняння є диференціальним рівнянням типу Ейлера та заміною часу зводиться до рівняння відносно  $y(\tau) = x_1(\Theta_0 - e^\tau)$  з постійними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^n f_{n,i+1} \left( -\frac{d}{d\tau} + i - 1 \right) \dots \left( -\frac{d}{d\tau} \right) y(\tau) + f_{n1}y(\tau) = 0.$$



Початкові умови  $y(\tau_0), y'(\tau_0), \dots, y^{(n-1)}(\tau_0)$  ( $\tau_0 = \ln \Theta_0$ ) знаходяться з системи лінійних рівнянь

$$y(\tau_0) = x_1(0) = x_1^0,$$

$$(-dy/d\tau)(\tau_0) = \dot{x}_1(0)\Theta_0 = x_2^0\Theta_0,$$

$$(-d/d\tau + 1)(-dy/d\tau)(\tau_0) = \ddot{x}_1(0)\Theta_0^2 = x_3^0\Theta_0^2,$$

.....

$$(-d/d\tau + n - 2)\dots(-dy/d\tau)(\tau_0) = x_1^{(n-1)}(0)\Theta_0^{n-1} = x_n^0\Theta_0^{n-1}.$$

Так як  $x_1(t) = y(\ln(\Theta_0 - t))$ , то інші функції  $x_2(t), \dots, x_n(t)$  знаходяться диференціюванням останньої рівності, тобто

$$x_k(t) = x_1^{(k-1)}(t), \quad k = 2, \dots, n.$$

Зауважимо, що якщо  $\alpha = \infty$ , то потрапляння з точки  $x_0$  за скінченний час  $T$  можливо лише на границю кола радіусу  $\varepsilon$  з центром у точці нуль.

**Приклад.** Розв'яжемо задачу позиційного синтезу на основі функції керованості, що дорівнює часу руху, для трьохвимірної канонічної системи. Розглянемо систему виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \quad |u| \leq 1, \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{6.17}$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0.$$

Матриця  $F^{-1}(\Theta)$ , що задається рівністю (6.13), і матриця  $F(\Theta)$  відповідно мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{\Theta^5}{120} & -\frac{\Theta^4}{40} & \frac{\Theta^3}{24} \\ -\frac{\Theta^4}{40} & \frac{\Theta^3}{12} & -\frac{\Theta^2}{6} \\ \frac{\Theta^3}{24} & -\frac{\Theta^2}{6} & \frac{\Theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2400}{\Theta^5} & \frac{960}{\Theta^4} & \frac{120}{\Theta^3} \\ \frac{960}{\Theta^4} & \frac{420}{\Theta^3} & \frac{60}{\Theta^2} \\ \frac{120}{\Theta^3} & \frac{60}{\Theta^2} & \frac{12}{\Theta} \end{pmatrix},$$

Коефіцієнт  $a_0$  у рівнянні  $2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$ , згідно зауваженню, оберемо рівним  $2d^2/f_{33} = 1/6(d=1)$  та будемо визначати для кожного  $x \neq 0$  функцію керованості  $\Theta(x)$  як розв'язок рівняння  $2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$ , з якого маємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\Theta^6 - 12\Theta^4x_3^2 - 120\Theta^3x_2x_3 - 240\Theta^2x_1x_3 - \\ & - 420\Theta^2x_2^2 - 1920\Theta x_1x_2 - 2400x_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Керування  $u(x)$ , що задається формулою (6.14), у аналізованому нами випадку має вигляд

$$u_\alpha(x) = -\frac{60}{\Theta^3(x)}x_1 - \frac{30}{\Theta^2(x)}x_2 - \frac{6}{\Theta(x)}x_3. \quad (6.19)$$

Це керування розв'язує задачу позиційного синтезу у всьому просторі за скінченний час  $T(x_0) = \Theta_0$ .  $\Theta_0 = \Theta(x_0)$  - додатній корінь рівняння (6.18) при  $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$ . Знайдемо траєкторію, що веде з точки  $x_0$  у початок координат, згідно системі (6.17) з керуванням  $u = u(x)$ , що задане рівністю (6.19), тобто згідно системі

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{60}{\Theta^3(x)}x_1 - \frac{30}{\Theta^2(x)}x_2 - \frac{6}{\Theta(x)}x_3 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Позначимо  $\theta(t) = \Theta(x(t))$  та додамо вираз  $\dot{\theta}(t) = -1$  в якості рівняння до цієї системи. Після інтегрування диференціального рівняння системи для  $\theta(t)$  та використання початкової умови  $\theta(0) = \Theta_0$  отримуємо, що  $\theta(t) = \Theta_0 - t$ , де  $\Theta_0 \in$

розв'язком рівняння (6.18) при  $x = x_0$ . Отже, траєкторія, яку ми шукали, є розв'язком задачі Коші виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{60}{(\Theta_0 - t)^3} x_1 - \frac{30}{(\Theta_0 - t)^2} x_2 - \frac{6}{(\Theta_0 - t)} x_3 \end{aligned} \quad (6.21)$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0,$$

звідки маємо

$$\begin{aligned} (\Theta_0 - t)^3 x_1^{(3)} + 6(\Theta_0 - t)^2 \ddot{x}_1 + 30(\Theta_0 - t) \dot{x}_1 + 60x_1 &= 0 \\ x_1(0) = x_1^0, \dot{x}_1(0) = x_2^0, \ddot{x}_1(0) = x_3^0 \end{aligned}$$

Роблячи заміну часу згідно рівності  $t = \Theta_0 - e^\tau$ , це диференціальне рівняння типу Ейлера ми зведемо до диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами відносно функції  $y(\tau) = x_1(\Theta_0 - e^\tau)$ , яке має вигляд

$$y''' - 9y'' + 38y' - 60y = 0.$$

Тут символ «штрих» значить похідну за змінною  $\tau$ . Розв'язок цього диференціального рівняння задається формулою

$$y(\tau) = e^{3\tau} (c_1 + c_2 \cos \sqrt{11}\tau + c_3 \sin \sqrt{11}\tau),$$

де постійні  $c_1, c_2, c_3$  знаходяться з початкових умов

$$\begin{aligned} y(\tau_0) &= x_1^0 \\ y'(\tau_0) &= -\Theta_0 x_2^0, \quad \tau_0 = \ln \Theta_0, \\ y''(\tau_0) - y'(\tau_0) &= \Theta_0^2 x_3^0 \end{aligned}$$

а, отже, дорівнюють

$$c_1 = \frac{1}{11\Theta_0} \left( \frac{20}{\Theta_0^2} x_1^0 + \frac{5}{\Theta_0} x_2^0 + x_3^0 \right)$$

$$c_2 = \xi_1 \cos(\sqrt{11} \ln \Theta_0) - \xi_2 \sin(\sqrt{11} \ln \Theta_0).$$

$$c_3 = \xi_1 \sin(\sqrt{11} \ln \Theta_0) + \xi_2 \cos(\sqrt{11} \ln \Theta_0)$$

Тут

$$\xi_1 = -\frac{1}{44\Theta_0} \left( \frac{36}{\Theta_0^2} x_1^0 + \frac{20}{\Theta_0} x_2^0 + 4x_3^0 \right), \quad \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{11}\Theta_0^2} \left( \frac{3}{\Theta_0} x_1^0 + x_2^0 \right).$$

Так як  $x_1(t) = y(\ln(\Theta_0 - t))$ , а функції  $x_2(t)$  та  $x_3(t)$  знаходяться диференціюванням функції  $x_1(t)$ , то

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)^3 (c_1 + \xi_1 \cos \gamma(t) + \xi_2 \sin \gamma(t))$$

$$x_2(t) = (\Theta_0 - t)^2 (-3c_1 - (3\xi_1 + \sqrt{11}\xi_2) \cos \gamma(t) + (-3\xi_2 + \sqrt{11}\xi_1) \sin \gamma(t)) ,$$

$$x_3(t) = (\Theta_0 - t)(6c_1 + (-5\xi_1 + 5\sqrt{11}\xi_2) \cos \gamma(t) + (-5\xi_2 - 5\sqrt{11}\xi_1) \sin \gamma(t))$$

де  $\gamma(t) = \sqrt{11} \ln((\Theta_0 - t) / \Theta_0)$ .

З (6.21) маємо, що керування  $u(x)$  на траєкторії  $x(t)$  має вигляд

$$u(x(t)) = (-6c_1 + 60(\xi_1 \cos \gamma(t) + \xi_2 \sin \gamma(t))).$$

Задля простоти обчислень та унаочнення результатів розв'яжемо задачу потрапляння з точок осі  $x_1^0 = x_2^0 = 0, x_3^0 > 0$  у початок координат. В цьому випадку, як витікає з рівняння (6.18), час руху  $\Theta_0$  з точки  $x_0 = (0, 0, x_3^0)$  дорівнює  $\Theta_0 = 6x_3^0$ . Траєкторія, що починається у точці  $(0, 0, x_3^0)$ , має вигляд

$$x_1(t) = (6x_3^0 - t)^3 (1 - \cos \gamma(t)) / 66$$

$$x_2(t) = (6x_3^0 - t)^2 (-3 + 3 \cos \gamma(t) - \sqrt{11} \sin \gamma(t)) / 66,$$

$$x_3(t) = (6x_3^0 - t)(6 + 5 \cos \gamma(t) + 5\sqrt{11} \sin \gamma(t)) / 66$$

де  $\gamma(t) = \sqrt{11} \ln \frac{66x_3^0 - t}{66x_3^0}$ .

На цій траєкторії керування визначається формулою

$$u(t) = -\frac{1}{11}(1 + 10\cos\gamma(t)),$$

і, як легко побачити, задовольняє заданому обмеженню.

## 7. Задача керування математичним маятником з попаданням не у точку спокою

В цьому розділі ми розглянемо задачу керування математичним маятником з попаданням не у точку спокою. Так як задача дуже важка для наглядного обчислення, ми запропонуємо алгоритм пошуку керування, який треба застосовувати у такому випадку.

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1$$

Проводимо заміну керування:

$$u = av + b$$

Та хочемо, щоб керування було від -1 до 1. Тоді:

$$\begin{array}{ll} v = -1, u = 0: & v = 1, u = 1: \\ 0 = -a + b & 1 = a + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = b = \frac{1}{2}$$

Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \text{вільний член}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} v \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Тоді отримуємо таке рівняння, що еквівалентне попередній системі:

$$\dot{x} = Ax + b_1v + b_2$$

Його розв'язок представляється у такому вигляді :

$$x(T) = e^{AT} \left( x_0 + \int_0^T e^{-At} (b_1 v + b_2) dt \right)$$

Отже, розглянемо загальний випадок:

$$x(T) = \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \end{pmatrix}$$

$$-\int_0^T e^{-At} b_2 dt + e^{-AT} x(T) - x_0 = \int_0^T e^{-At} b_1 v dt$$

$$-e^{-AT} x(T) + x_0 + \int_0^T e^{-At} b_2 dt = -\int_0^T e^{-At} b_1 v dt \quad (7.1)$$

Далі виникає проблема: треба задати  $T$  та дізнатись, чи можна за цей час  $T$  потрапити у кінцеву точку? Треба брати таке  $T$ , щоб була одна точка перемикання.

Отже, ґрунтуючись на проведеному дослідженні, маємо такий алгоритм пошуку керування, яке має одне перемикання та задовольняє рівності (7.1):

1. Усі доданки переносимо вліво.
2. Отримуємо функцію від  $T$  (хочемо при деякому  $T$  потрапити у точку (0,0))
3. Керування  $v$  приймає значення або -1, або +1.
4. Хочемо потрапити у кінцеву точку за одне перемикання. Тобто виникає нове значення  $T_1$  - момент перемикання.
5. Якщо потрапити у 0 одразу не виходить, то момент  $T$  може бути занадто маленьким, отже обираємо значення більше:  $T + h$  та отримуємо цикл.

## 8. Задача коли функція керованості є часом руху на прикладі візка

У цьому розділі ми розглянемо приклад розв'язку синтезу, який був запропонований у книзі [4].

Розглянемо керовану систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}, \quad |u| \leq 1. \quad (8.1)$$

Числа  $a_1$  та  $a_2$  визначимо з рівності:  $\lambda^2 - a_2\lambda - a_1 = (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ .

Звідки  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -2$ . Задамо  $W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , тоді система  $FA_1 + A_1^*F = -W$

має вигляд  $f_{12} = 1$ ,  $-f_{22} - 2f_{12} + f_{11} = 0$ ,  $-2f_{22} + f_{12} = -1$ ,

$f_{12} = f_{21}$  в силу симетричності матриці  $F$ . Звідси  $f_{11} = 3$ ,  $f_{12} = f_{21} = 1$ ,  $f_{22} = 1$ .

Нехай  $m = 2$ . Тоді рівність  $\det(f_{ij}(v + m + n - i - j + 1))_{i,j=1}^n = 0$  має вигляд

$$\begin{vmatrix} 3(v+3) & v+2 \\ v+2 & v+1 \end{vmatrix} = 0$$

у якому найбільший корінь  $\alpha_0 = -2 + \sqrt{6}/2$ . Тому нехай  $\alpha = 1$ .

В даному випадку

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Оберемо  $a_0$  з умови  $2a_0(F^{-1}a, a) = 1$ , тоді  $a_0 = 1/9$ . Функція  $\Theta(x)$  при  $x \neq 0$  є додатнім розв'язком рівняння

$$\frac{2}{9}\Theta^4 - \Theta^2x_2^2 - 2\Theta x_1x_2 - 3x_1^2 = 0. \quad (8.2)$$

Задача синтезу розв'язується у всьому просторі за допомогою керування

$$u(x) = -\frac{x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{2x_2}{\Theta(x_1, x_2)}, \quad (8.3)$$

причому  $|u(x)| \leq 1$ .

Початкова система (8.1) з цим керуванням має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{2x_2}{\Theta(x_1, x_2)} \end{cases}. \quad (8.4)$$

Покажемо іншим способом, що керування  $u$  задовольняє заданому обмеженню  $|u| \leq 1$  у всьому просторі. Нехай точка  $(x_1, x_2)$  така, що  $x_2 = 0$ . Тоді з рівняння (8.2), що визначає  $\Theta$ , маємо, що  $\Theta = \sqrt[4]{27/2} \sqrt{|x_1|}$ , а з виду керування (8.3) маємо, що  $u(x) = -\sqrt{2/27} \operatorname{sign} x_1$  та  $|u(x_1, 0)| \leq 1$ .

Нехай тепер  $x_2 \neq 0$ , а число  $k$  таке, що справедлива рівність  $x_1 = kx_2^2$ .

Будемо визначати  $\Theta$  з рівняння (8.2) у вигляді  $\Theta = \mu x_2$ , де  $\mu$  - деяка константа. Тоді з (8.2) маємо, що  $\mu$  задовольняє рівнянню

$$\mu^4 = \frac{27}{2} k^2 + 9k\mu + \frac{9}{2} \mu^2. \quad (8.5)$$

З вигляду керування (8.3) маємо, що  $|u| = |k + 2\mu|/\mu^2$ . Використовуючи рівність (8.5), отримуємо

$$u^2 = \frac{(k + 2\mu)^2}{\frac{27}{2} k^2 + 9k\mu + \frac{9}{2} \mu^2}.$$

З нерівності  $u^2 \leq 1$  випливає, що повинна виконуватись нерівність

$$\frac{2(k + 2\mu)^2}{27k^2 + 18k\mu + 9\mu^2} - 1 = -\frac{\mu^2 + 10k\mu + 25k^2}{9\mu^2 + 18k\mu + 27k^2} \leq 0 \quad (8.6)$$

Справедливість нерівності (8.6) витікає з того, що у числівнику цього виразу стоїть невід'ємно визначена квадратична форма, а у знаменнику додатньо визначена. Отже, керування досягає своєї верхньої границі при  $\mu = -5k$ . З (8.5) отримуємо, що  $k = \pm 9/25$ .

Таким чином, на лінії  $x_1 = -9x_2|x_2|/25$  буде  $u = 1$  при  $x_1 > 0, x_2 < 0$  та  $u = -1$  при  $x_1 < 0, x_2 > 0$ . Похідна від функції  $\Theta$  в силу системи (8.4) має вигляд

$$\dot{\Theta} = -\frac{2x_1^2 + 2x_2^2\Theta^2}{12x_1^2 + 6x_1x_2\Theta + 2x_2^2\Theta^2}.$$

$$\text{Тут } F^\alpha = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$



Рівняння  $\det(W - vF^\alpha) = 0$  має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-12v & -3v \\ -3v & 2-2v \end{vmatrix} = 15v^2 - 28v + 4 = 0,$$

тоді  $v_{\min} = 2/(7 + \sqrt{34})$ ,  $v_{\max} = 2/(7 - \sqrt{34})$ . Отже, похідна функції  $\Theta(x)$  в силу системи (8.4) задовольняє нерівностям

$$-\frac{2}{7 - \sqrt{34}} \leq \dot{\Theta} \leq -\frac{2}{7 + \sqrt{34}}.$$

Нехай початкова точка  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ . Тоді час  $T(x_1^0, x_2^0)$  потрапляння з довільної точки  $x_0$  у початок координат задовольняє нерівностям

$$\frac{7 - \sqrt{34}}{2} \Theta(x_1^0, x_2^0) \leq T(x_1^0, x_2^0) \leq \frac{7 + \sqrt{34}}{2} \Theta(x_1^0, x_2^0).$$

Нехай початкова точка  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  така, що  $x_2^0 = 0$ . З (8.2), як вже зазначалося, витікає, що  $\Theta_0 = \sqrt[4]{27/2} \sqrt{|x_1^0|}$ . Тоді час  $T(x_1^0, 0)$  потрапляння з таких точок у початок координат задовольняє нерівностям

$$\frac{7 - \sqrt{34}}{2} \sqrt[4]{27/2} \sqrt{|x_1^0|} \leq T(x_1^0, 0) \leq \frac{7 + \sqrt{34}}{2} \sqrt[4]{27/2} \sqrt{|x_1^0|}.$$

Випишемо задачу Коші, до розв'язку якої зводиться пошук траєкторії  $x(t)$ , що веде з  $x_0$  до 0. Позначимо  $x_3(t) = \Theta(x(t))$ . Тоді  $x(t)$  є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{x_3^2} - \frac{2x_2}{x_3}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{x_1^2 + x_2^2 x_3^2}{6x_1^2 + 3x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3^2}$$

з початковими умовами  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = \sqrt[4]{27/2} \sqrt{|x_1^0|}$ .

## Висновки

В результаті виконання кваліфікаційної роботи була висвітлена задача керування математичним маятником з невід'ємним керуванням, було детально розглянуто фізичну постановку задачі керування математичним маятником з невід'ємним керуванням та підхід до її розв'язку. Виходячи з цього, було продемонстровано фазовий портрет задачі керування математичним маятником з невід'ємним керуванням, тобто зображення траєкторії.

До того ж, у роботі була розглянута низка різноманітних задач з методу функції керованості. А саме, ми детально розібрали приклад задачі керування математичним маятником з керуванням, що обмежене по модулю одиницею. Важливо, що у роботі було наведено декілька цікавих прикладів задач з додатним керуванням, які дуже добре пов'язані з основною метою роботи.

Один з розділів кваліфікаційної роботи присвячено задачі позиційного синтезу обмеженого керування, знаходженню розв'язку цієї задачі в аналітичній формі та надання траєкторії керування у явному вигляді. Також було приведено один із методів побудування функції керованості для канонічної системи, тобто ми досить детально розглянули випадок, у якому функція керованості є часом руху у випадку матриці інтегрального вигляду, та навели приклад розв'язку задачі позиційного синтезу на основі функції керованості, що дорівнює часу руху, для трьохвимірної канонічної системи. До того ж, було порушено питання про задачу керування математичним маятником з попаданням не у точку спокою.

В даній роботі розглянуто розв'язок задач керування з додатним керуванням, розв'язок задачі керування з системою коливального виду, побудовані фазові портрети траєкторій, також розглянуто розв'язок задач аналітичним способом, які на цей час є дуже цікавими задачами у розвитку теорії керування.

### Список використаних джерел:

1. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., and Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. - 4th ed. - М.: "Nauka", Main edition of physical and mathematical literature, 1983. - 392 p.
2. Zverkin A. M., Rozova V. N. On the structure of the controllability domain, Differential Equations, 1982, Volume 18, Number 2.
3. Korobov V.I. Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control. Journal of Optimization Theory and Applications volume 134, pages 161–176 (2007).
4. Korobov V.I. Controllability function method, M.-Izhevsk, R&C Dynamics, 2007:1-576 (in Russian).
5. Korobov V.I. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem. Math. USSR Sb. 1980;37(4):535-557, translation from Mat. Sb. 1979;109(151):582-606, <https://doi.org/10.1070/SM1980v037n04ABEH002094>
6. Korobov V.I., Derevianko A.I. Controllability of the linear switched dynamical systems of the special type. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 89, pp. 93-101.  
[https://periodicals.karazin.ua/mech\\_math/article/view/13046](https://periodicals.karazin.ua/mech_math/article/view/13046)
7. Korobov V.I. Time Optimality for Systems with Multidimensional Control and Vector Moment Min-Problem/ Journal of Dynamical and Control Systems, 2020, 26(3), pp. 525–550.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10883-019-09465-2>
8. Stiepanova K.V., Korobov V.I. The peculiarity of solving the synthesis problem for linear systems to a non-equilibrium point. / Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2021. – Vol.17, No.3, pp. 326-340.  
<http://jmag.ilt.kharkov.ua/jmag/pdf/17/jm17-0326e.pdf>

9. Korobov V.I., Revina T.V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system// IMA J. Math. Control and Information, 2021, 38(1), pp. 396-416,  
<https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035>
10. Korobov V.I. Almost linearizable control systems // Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2021, 33 (3), pp. 473-497.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s00498-021-00288-w>
11. Korobov V.I., Sklyar G.M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. Dif. Equ. 1990;26(11):1422-1431, translation from *Differentsial'nye Uravneniya*. 1990;26(11):1914–1924.