Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики

(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра прикладної математики

(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Кваліфікаційна робота

магістр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему **Модель Леслі і неявні лінійні різницеві рівняння**

Виконала: студентка групи МП61

II курсу (другий магістерський рівень),

спеціальності 113 Прикладна математика

(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)

Прикладна математика

(освітньо-професійна програма)

Кононенко Т.М.

(прізвище та ініціали)

Керівник канд.ф.-м.наук. Півень О.Л.

(прізвище та ініціали)

Рецензент канд.ф.-м.наук, доцент Гефтер С.Л.

(прізвище та ініціали)

Харків - 2022 рік

Анотація

Кононенко Т.М. *Модель Леслі і неявні лінійні різницеві рівняння.*

Надано опис класичної моделі Леслі та її модифікації, яку описано за допомоги неявного лінійного різницевого рівняння. Цю модифікацію запропоновано S. Campbell. Наведено огляд результатів щодо розв'язності неявних лінійних різницевих рівнянь, одержаних А.Г. Руткасом та М.Ф. Бондаренко. У кваліфікаційній роботі ці результати застосовано до одержаного неявного лінійного різницевого рівняння S. Campbell, яке містить матрицю Леслі. Розглянуто випадок двох та трьох вікових груп і вектору міграційних коефіцієнтів, які утворюють геометричну прогресію.

Annotation

Kononenko T.M. *Leslie model and implicit linear difference equations.*

A description of the classic Leslie model and its modifications, which is described with the help of an implicit linear difference equation, is given. This modification was proposed by S. Campbell. An overview of the results regarding the solvability of implicit linear differential equations obtained by A.G.Rutkas and M.F. Bondarenko is given. In the qualification work, these results are applied to the obtained implicit linear difference equation of S. Campbell, which contains the Leslie matrix. The case of two and three age groups and a vector of migration coefficients that form a geometric progression is considered.

Зміст

РОЗДІЛ 1. Вступ

Опис змін чисельності популяцій являється частиною математичної біології та використовується для перевірки теоретичних ідей та уявлення про закони росту та еволюції біологічних видів та популяцій.

Динамічні моделі популяцій, які описуються за допомогою диференціальних або різницевих рівнянь, являються предметом багатьох досліджень [4,6]. Однією з таких є модель Леслі з дискретним часом [6]. Така модель описується за допомогою явного різницевого рівняння.

$$x(t+1) = Lx(t), \qquad t = 0,1,\ldots$$

де L – квадратна матриця розміру n х n. Якщо в цій моделі врахувати міграційні потоки, то модель удосконалюється та одержується неоднорідне різницеве рівняння [4] :

$$x(t+1) = Lx(t) + f(t),$$

з вектор-функцією $f : N_0 \to R^n, N_0 = \{0,1,2,....\}$.

В книзі [4] приведена також ще одна задача: потрібно знайти початкову чисельність популяцій таку, що в момент часу m чисельність популяції стала x_0. У книзі [4] показано, що ця модель описується за допомогою наступного лінійного різницевого рівняння

$$Ly(t) = y(t-1) - f(m-t), \qquad t = 1,\ldots,m \tag{1.1}$$

(див. розділ 4 кваліфікаційної роботи). Матриця Леслі L може бути виродженою. Тому це рівняння є нерозв'язним відносно *y(t)* і називається *неявним*. Неявні лінійні різницеві рівняння досліджувались з багатьох точок зору в [1-5]. Теорію таких рівнянь розглянуто в статті [1]. У підрозділі 4.2 кваліфікаційної роботи наведено огляд результатів статті [1] щодо розв'язності неявних різницевих рівнянь. Приклади застосування цих результатів до моделі (1.1) розглянуто у підрозділі 4.3.

РОЗДІЛ 2. Опис класичної моделі Леслі.

В життєвому циклі будь-якого організму можна виділити або кілька стадій розвитку або кілька вікових степенів, які визначаються в деяких одиницях часу, наприклад, в роках з моменту народження особини. Тоді популяція природно розпадається на деяке число n вікових груп.

Спосіб розбиття популяції на вікові групи, як правило, визначається біологічними особливостями організмів, а також специфікою розглянутої задачі. Найпростіші постулати щодо взаємозалежності кількостей представників вікових груп призводять до так званої моделі Леслі[4].

Нехай $x_i(t)$ означає чисельність i-й вікової групи *(i = 1, 2, ... , n),* якщо не враховується поділ по статі, і чисельність самок i-ї групи, якщо поділ по статі істотний для даної популяції. Час t відраховується в дискретні моменти, що збігаються з моментами переходу з однієї вікової групи в наступну. Припустимо, що функції народжуваності b_i, що показують чисельність потомства (або новонароджених самок) і-й вікової групи, являють собою лінійні функції чисельності лише даної вікової групи.

$$b_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_i x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.1)$$

із невід'ємними коефіцієнтами b_i — коефіцієнтами народжуваності. Тоді чисельність початкової вікової групи, що складається з потомства всіх вікових груп, буде описуватися співвідношенням:

$$x_1(t+1) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i(t), \qquad t = 0, 1, \ldots \qquad (2.2)$$

Припустимо, що функції $s_i(x_1, \ldots, x_n)$ описують перехід з і-ї вікової групи в (і + 1)-у групу, також суть лінійні функції чисельності лише і-й вікової групи:

$$s_i(x_1, \ldots, x_n) = s_i x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (2.3)$$

де коефіцієнти виживання s_i ($0 < s_i \leq 1$) показують, яка частка особин і-ї групи доживає до наступного, (i + 1) -го віку. Тоді для всіх груп, починаючи з другої, виконуються співвідношення

$$x_{i+1}(t+1) = s_i x_i(t), \qquad t = 0,1,\ldots, \quad i = 1, \ldots, n-1. \qquad (2.4)$$

Постулати (2.1) і (2.3) означають, що ми не враховуємо змін параметрів в залежності від умов середовища і нехтуємо впливом загальної чисельності популяції на народжуваність і смертність.

Якщо через *x(t)* позначити n-вимірний вектор-стовпець, координатами якого є чисельності всіх вікових груп, то з (2.2) і (2.4) випливає рівняння

$$x(t+1) = Lx(t) \quad , t=0,1,2,\ldots. \qquad (2.5)$$

де квадратна матриця L порядку n х n має вигляд:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \iddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $0 < s_j \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$ і називається матрицею Леслі.

Рівняння (2.5) являє собою систему *n* лінійних різницевих рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння, що відповідає початковому розподілу кількостей $x(0)$, може бути записано у вигляді:

$$x(t) = L^t x(0), \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

де L^n – *n*-а степінь матриці *L*.

РОЗДІЛ 3. Моделі Леслі, що описується за допомогою неявного різницевого рівняння.

Якщо врахувати міграційні процеси, то система (2.5) стає неоднорідною, тобто має наступний вигляд :

$$x(t+1) = Lx(t) + f(t), \quad t = 0,1,2,\ldots, \tag{3.1}$$

з матрицею Леслі L (1.6), де i-а компонента вектору $f(t) \in R^n$ для будь-якого t показує різницю між прибулими та вибулими представниками i-ї вікової групи на інтервалі часу $(t, t+1)$, тобто на момент $t+1$.

Зауважимо, що матриця L може бути виродженою, наприклад, якщо n-а вікова група має нульовий коефіцієнт народжуваності, то останній стовпчик матриці L дорівнює нулю. Тепер розглянемо таку задачу [4] . Нехай нам потрібно знайти початкову чисельність популяції таку, за якої в момент часу m чисельність популяції становила би x_0 Тоді внаслідок (3.1) маємо наступну систему різницевих рівнянь

$$x(t+1) = Lx(t) + f(t), \quad t = 0,1,2,\ldots,m-1\ . \tag{3.2}$$

Для цієї системи початкова умова має вигляд

$$x(m) = x_0. \tag{3.3}$$

Зробивши в (3.2),(3.3) заміну $y(t) = x(m-t), \quad t = 0,1,2,\ldots,m$, одержимо наступну початкову задачу

$$y(t-1) = Ly(t) + f(m-t), \quad t = 1,2,\ldots,m \tag{3.4}$$

$$y(0) = x_0.$$

Матриця Леслі L в (3.4) може бути виродженою і тому рівняння (3.4) називають *неявним* або *виродженим* [1-5] .

РОЗДІЛ 4. Неявні різницеві рівняння.

4.1. Постановка задачі

Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$Ax(t+1) + Bx(t)= f(t), \quad t = 0, 1, 2,\ldots \tag{4.1}$$

у просторі $\mathbb{C}^n$. Тут x_0 - заданий початковий вектор, $f(t)$- задані вектори, A, B – задані квадратні матриці порядку n. Лінійне різницеве рівняння (4.1) називають неявним, оскільки матриця A є не обов'язково оборотною. Такі рівняння використовуються в економіці, демографії, теорії керування [4] та в фізиці [3]. Викладемо елементи теорії неявних лінійних різницевих рівнянь з [1].

Нехай $det(\lambda A + B) \neq 0$ в деякій точці $\lambda \in \mathbb{C}$. За допомогою підстановки

$u(t) = \sum_{k=0}^{t}(-1)^k\lambda^k C_t^k x(t-k)$ в систему (4.1) перетворимо її до стаціонарної:

$$Tu(t+1) + u(t) = \varphi(t), \quad t = 0, 1, 2,\ldots \tag{4.2}$$

де $T = (\lambda A + B)^{-1}A$, $\varphi(t) = (\lambda A + B)^{-1}\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\lambda^k C_t^k f(t-k)$.

4.2. Розв'язність неявного лінійного різницевого рівняння

Позначимо через $KerT$ и ImT ядро T та образ T, відповідно. Опишемо всі розв'язки стаціонарної системи (4.2). Існує оборотна матриця N, яка перетворює T в блочно-діагональну матрицю $NTN^{-1} =J+H$, де J- оборотна ($\nu \times \nu$) - матриця, а блок H є ($\gamma \times \gamma$) ($H^r = 0$, $H^{r-1} \neq 0$). Значення r називається *індексом* матриці T ($r = indT$), воно визначається як найменше з цілих чисел $k \geq 0$, для якого $rank\, T^k = rank\, T^{k+1}$. Оскільки

$$\mathbb{C}^n = Im\,(T^r) + Ker\,(T^r),$$

ми можемо вибрати $N^{-1} = \{h_1,\ldots, h_\upsilon, g_1,\ldots,g_\gamma\}$, де $\{h_k\}^\upsilon_1$ є базисом для простору $T^r(\mathbb{C}^n)$ і $\{g_j\}^\gamma_1$ є базисом для простору $Ker(T^r)$, $n = \nu + \gamma$. Вектори $Nu(t)$, $N\varphi(t)$ представлені у вигляді

$$Nu(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, N\varphi(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix},$$

де $a(t)$, $c(t) \in \mathbb{C}^\nu$, $b(t)$, $d(t) \in \mathbb{C}^\gamma$. Тоді система (4.2) еквівалентна наступній системі рівнянь в просторах $\mathbb{C}^\nu$, $\mathbb{C}^\gamma$ відповідно:

$$a(t+1) = -J^{-1}a(t) + J^{-1}c(t), \quad t = 0, 1, 2, .. \tag{4.3}$$

$$Hb(t+1) + b(t) = d(t), \quad t = 0, 1, 2, .. \tag{4.4}$$

Розв'язки цих рівнянь мають відповідний вигляд [1]

$$a(t) = (-1)^t J^{-t} a_0 + \sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}J^{k-t}c(k), \tag{4.5}$$

$$b(t) = \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k H^k d(t+k), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.6}$$

де $a_0=a(0)$ - довільний вектор з $\mathbb{C}^{v}$.

Тоді послідовність

$$u(t) = N^{-1}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, t > 0, \tag{4.7}$$

є розв'язком системи (4.2). Розв'язок $\{u(t)\}^{\infty}_0$ однозначно визначається початковим вектором $u_0=u(0)$. Початковий вектор не може бути обраним довільним чином. Всі допустимі початкові значення утворюють гіперплощину

$$\{u_0\} = N^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \left\{ N^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} : a_0 \in \mathbb{C}^{v} \right\}, \tag{4.8}$$

де вектор $b_0=b(0)$ є $\mathbb{C}^{\gamma}$ має такий вигляд:

$$b_0 = \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k H^k d(k) \tag{4.9}$$

4.3. Застосування до моделі Леслі.

Неявне рівняння (3.4) зводиться до рівняння (4.2), якщо $T = -L$, а $\varphi(t) = f(\mathrm{m} - t - 1)$, $t = 0, \ldots, \mathrm{m} - 1$.

Приклад 4.1

Нехай $T = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ -S & 0 \end{pmatrix}$, де, $b_1 > 0$, $S \in (0, 1)$.

Матриця T зв'язана з матрицею Леслі L співвідношенням $T = -L$, де $n = 2$, $b_2 = 0$, $S_1 = S$. Зауважимо, що матриця T не є оборотною.

Знайдемо власні значення матриці T:

$det(T - \lambda E) = -\lambda(-b_1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -b_1$, $\lambda_2 = 0$.

Отже матриця T розміру 2×2 має 2 різних власних значення і тому існує базис простору $\mathbb{C}^2$, який складено з відповідних власних векторів.

У якості такого базису можно взяти власні вектори:

$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{S}{b_1} \end{pmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = -b_1$ та

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 0$.

Таким чином:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad NTN^{-1} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix},$$

де $J = -b_1$, $H = 0$ і тому $\nu = \gamma = 1$.

Отже, $NTN^{-1} = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} \alpha(m-t-1) \\ \beta(m-t-1) \end{pmatrix}$, в такому випадку $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$

Тоді $N\varphi(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ -\dfrac{S\alpha(t)}{b_1} + \beta(t) \end{pmatrix}$

Оскільки $J^{-1} = -\dfrac{1}{b_1}$, то рівняння (4.5) має вигляд

$$a(t+1) = -J^{-1}a(t) + J^{-1}c(t) = \frac{a(t)}{b_1} - \frac{\alpha(t)}{b_1} \tag{4.10}$$

Оскільки $H = 0$, рівняння (4.6) має вигляд:

$$b(t) = -\frac{S\alpha(t)}{b_1} + \beta(t) \tag{4.11}$$

і ця формула водночас дає єдиний розв'язок цього рівняння за формулою (4.8).

Розв'язок рівняння (4.10) визначається за формулою (4.7)

$$a(t)=(-1)^t J^{-t} a_0+\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1} J^{k-t} c(k)=$$

$$=\left(\frac{1}{b_1}\right)^t a_0+\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\left(-\frac{1}{b_1}\right)^{k-t} c(k) \qquad (4.12)$$

де $a_0=a(0)-$ довільне комплексне число.

Тепер за допомогою формули (4.9), знаходимо всі розв'язки рівняння (4.2):

$$u(t)=N^{-1}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(t) \\ \frac{Sa(t)}{b_1}+b(t) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left(b_1\right)^{-t} a_0+\sum\limits_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\left(-b_1\right)^{t-k} c(k) \\ \frac{S\left(\left(b_1\right)^{-t} a_0+\sum\limits_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\left(-b_1\right)^{t-k} c(k)-\alpha(t)\right)}{b_1}+\beta(t) \end{pmatrix}, \qquad (4.13)$$

де $a_0=a(0)-$ довільне комплексне число.

Тоді всі допустимі початкові значення утворюють гіперплощину:

$$\left\{u_0\right\}=N^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}+\left\{N^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_0 \in \mathbb{C}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{S\alpha(0)}{b_1}+\beta(0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}: a_0 \in \mathbb{C}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a_0 \\ \frac{S\left(a_0-\alpha(0)\right)}{b_1}+\beta(0) \end{pmatrix}: a_0 \in \mathbb{C}\right\}.$$

У частковому випадку, коли $\varphi(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Маємо $b(t)=0$ та $a(t)=\left(\frac{1}{b_1}\right)^t a_0$, Тому розв'язок рівняння (4.2) має вигляд:

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{b_1}\right)^t a_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{b_1}\right)^t a_0 \\ \left(\dfrac{1}{b_1}\right)^{t+1} S a_0 \end{pmatrix},$$

а відповідна гіперплощина допустимих початкових значень:

$$\{u_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ \dfrac{S a_0}{b_1} \end{pmatrix} : a_0 \in \mathbb{C} \right\}.$$

А для випадку, коли $\varphi(t) \equiv const$, тобто $\varphi(t) = \varphi_0 = \binom{\alpha_0}{\beta_0}$ гіперплощина початкових допустимих значень має наступний вигляд:

$$u(0) = u_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ \dfrac{S(a_0 - \alpha_0)}{b_1} + \beta_0 \end{pmatrix} : a_0 \in \mathbb{C} \right\}, \text{ де } a_0 - \text{ довільна стала.}$$

Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 q_1{}^t \\ \beta_0 q_2{}^t \end{pmatrix}$, де $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $q_1, q_2 > 0$. А $\varphi\left(t\right) = f\left(m - t - 1\right)$, $t = 0, \ldots, m-1$.

Тоді $\varphi(t)$ має наступний вигляд:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 q_1{}^{m-t-1} \\ \beta_0 q_2{}^{m-t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

$$N\varphi(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{S}{b_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 q_1{}^{\mathrm{m}-t-1} \\ \beta_0 q_2{}^{\mathrm{m}-t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 q_1{}^{\mathrm{m}-t-1} \\ -\dfrac{S\alpha_0 q_1{}^{\mathrm{m}-t-1}}{b_1} + \beta_0 q_2{}^{\mathrm{m}-t-1} \end{pmatrix}$$

Розглянемо випадок для $b_1 q_1 \neq 1$. Знайдемо *a(t)* та *b(t)* за формулами (4.12) та (4.11) відповідно:

$$a(t) = (-1)^t \left(-\frac{1}{b_1}\right)^t a_0 + \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^{t-k-1} \left(-b_1\right)^{t-k} \alpha_0 q_1^{m-k-1} =$$

$$= b_1^{-t} - b_1^t \alpha_0 q_1^{m-1} \sum_{k=0}^{t-1} b_1^{-k} q_1^{-k} = b_1^{-t} a_0 - b_1^t \alpha_0 q_1^{m-1} \frac{q_1^t b_1^t - 1}{q_1^{t-1} b_1^{t-1} \left(q_1 b_1 - 1\right)}$$

$$b(t) = -\frac{S\alpha(t)}{b_1} + \beta(t) = -\frac{S\alpha_0 q_1^{\mathrm{m}-t-1}}{b_1} + \beta_0 q_2^{\mathrm{m}-t-1}$$

Для цього випадку загальний розв'язок рівняння (4.2) має наступний вигляд :

$$u(t) = \begin{pmatrix} b_1^{-t} a_0 - b_1^t \alpha_0 q_1^{\mathrm{m}-1} \dfrac{q_1^t b_1^t - 1}{q_1^{t-1} b_1^{t-1} \left(q_1 b_1 - 1\right)} \\ \dfrac{S}{b_1} \left(b_1^{-t} a_0 - b_1^t \alpha_0 q_1^{\mathrm{m}-1} \dfrac{q_1^t b_1^t - 1}{q_1^{t-1} b_1^{t-1} \left(q_1 b_1 - 1\right)} - \alpha_0 q_1^{\mathrm{m}-t-1} \right) + \beta_0 q_2^{\mathrm{m}-t-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^{-t} a_0 - b_1 \alpha_0 q_1^{m-t} \dfrac{q_1^t b_1^t - 1}{q_1 b_1 - 1} \\ \dfrac{S}{b_1} \left(b_1^{-t} a_0 - b_1 \alpha_0 q_1^{m-t} \dfrac{q_1^t b_1^t - 1}{q_1 b_1 - 1} - \alpha_0 q_1^{m-t-1} \right) + \beta_0 q_2^{m-t-1} \end{pmatrix}$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \dfrac{S}{b_1} \left(a_0 - \alpha_0 q_1^{m-1} \right) + \beta_0 q_2^{m-1} \end{pmatrix}$$

Щоб знайти $u(t)$ для $b_1 q_1 = 1$, підрахуємо границю

$$\lim_{b_1 q_1 \to 1} \frac{b_1^t q_1^t - 1}{b_1^{t-1} q_1^{t-1} \left(b_1 q_1 - 1\right)} = \lim_{b_1 \to 1} \frac{\left(b_1 + q_1\right) t b_1^{t-1} q_1^{t-1}}{\left(b_1 + q_1\right) q_1^{t-2} b_1^{t-2} \left(t q_1 b_1 - t + 1\right)} = \frac{t}{t - t + 1} = t$$

За формулою (4.13) маємо наступний розв'язок:

$$u(t) = \begin{pmatrix} q_1^t a_0 - \alpha_0 q_1^{\mathrm{m}-t-1} t \\ \dfrac{S}{b_1} \left(q_1^t a_0 - \alpha_0 q_1^{\mathrm{m}-t-1} (t+1) \right) + \beta_0 q_2^{\mathrm{m}-t-1} \end{pmatrix}$$

Гіперплощина початкових допустимих значень має наступний вигляд:

$$u_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ S\left(a_0 - \alpha_0 q_1^{\,m-1}\right) + \beta_0 q_2^{\,m-1} \end{pmatrix} : a_0 \in \mathbb{C} \right\}$$

Якщо $a_0 \in \mathbb{R}$, то $u_0 \in \mathbb{R}^2$ та $u(t) \in \mathbb{R}^2$ для будь-якого $t = 0,1, \ldots, m-1$.

Приклад 4.2

Нехай $T = \begin{pmatrix} 0 & -b_2 & 0 \\ -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 & 0 \end{pmatrix}$, де $b_2 > 0$, $S_1, S_2 \in (0,\ 1)$

Матриця T зв'язана з матрицею Леслі L співвідношенням $T = -L$, де $n = 3$, $b_1 = b_3 = 0$. Зауважимо, що матриця T не є оборотною.

Знайдемо власні значення матриці T:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -b_2 & 0 \\ -S_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -S_2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(T - \lambda E) = -\lambda\left(\lambda^2 - S_1 b_2\right) \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{S_1 b_2},\ \lambda_2 = -\sqrt{S_1 b_2},\ \lambda_3 = 0.$$

Тому матриця 3×3 має 3 різних власних значення і тому існує базис простору $\mathbb{C}^2$, який складено з відповідних власних векторів.

У якості такого базису можна взяти наступні власні вектори:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\dfrac{S_1}{b_2}} \\ \dfrac{S_2}{b_2} \end{pmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = \sqrt{S_1 b_2}$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\dfrac{S_1}{b_2}} \\ \dfrac{S_2}{b_2} \end{pmatrix}$$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = -\sqrt{S_1 b_2}$ та

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$, який відповідає власному значенню $\lambda_3 = 0$.

Таким чином:

$H = \{0\}$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{S_1 b_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{S_1 b_2} \end{pmatrix}$$

Тому $\nu = 2$ та $\gamma = 1$

Отже, $NTN^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{S_1 b_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{S_1 b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\dfrac{S_1}{b_2}} & \sqrt{\dfrac{S_1}{b_2}} & 0 \\ \dfrac{S_2}{b_2} & \dfrac{S_2}{b_2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b_2}{S_1}} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b_2}{S_1}} & 0 \\ -\dfrac{S_2}{b_2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} \alpha q_1^t \\ \beta q_2^t \\ \delta q_3^t \end{pmatrix}$, де $\alpha, \beta, \delta, q_1, q_2, q_3 > 0$.

Тоді $\varphi(t) = f(m-t-1) = \begin{pmatrix} \alpha_0 q_1^{m-t-1} \\ \beta_0 q_2^{m-t-1} \\ \delta_0 q_3^{m-t-1} \end{pmatrix}$

$$N\varphi(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}} & 0 \\ -\frac{S_2}{b_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 q_1^{m-t-1} \\ \beta_0 q_2^{m-t-1} \\ \delta_0 q_3^{m-t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0 q_1^{m-t-1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1} \\ \frac{\alpha_0 q_1^{m-t-1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1} \\ -\frac{S_2 \alpha_0 q_1^{m-t-1}}{b_2} + \delta_0 q_3^{m-t-1} \end{pmatrix}$$

Тобто:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\alpha_0 q_1^{m-t-1} - \sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\alpha_0 q_1^{m-t-1} + \sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\right) \end{pmatrix}, \quad d(t) = -\frac{S_2 \alpha_0 q_1^{m-t-1}}{b_2} + \delta_0 q_3^{m-t-1}$$

Оскільки $J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{S_1 b_1}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{S_1 b_1}} \end{pmatrix}$, то рівняння (4.3) відносно $a(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$, має вигляд:

$$a(t+1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{S_1b_2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{S_1b_2}} \end{pmatrix} a(t)+\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{S_1b_2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{S_1b_2}} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{\alpha_0 q_1^{m-t-1}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1} \\ \frac{\alpha_0 q_1^{m-t-1}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{a_1(t)}{\sqrt{S_1b_2}} \\ \frac{a_2(t)}{\sqrt{S_1b_2}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{S_1b_2}}\left(\frac{\alpha_0 q_1^{m-t-1}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{S_1b_2}}\left(\frac{\alpha_0 q_1^{m-t-1}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\right) \end{pmatrix}$$

Оскільки $H=0$, рівняння (4.4) має вигляд:

$$b(t)=-\frac{S_2}{b_2}\alpha_0 q_1^{m-t-1}+\delta_0 q_3^{m-t-1}$$

і ця формула водночас дає єдиний розв'язок цього рівняння за формулою (4.6).

Розв'язок рівняння (4.3) визначається за формулою (4.5).

$$a(t)=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{t-k}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\alpha_0 q_1^{m-k-1}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-k-1} \\ \frac{\alpha_0 q_1^{m-k-1}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-k-1} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^t a_{01}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}+\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\frac{\frac{a_0 q_1^{m-k-1}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-k-1}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}} \\ \frac{a_{02}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}-\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\frac{a_0 q_1^{m-k-1}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-k-1}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}} \end{pmatrix}, \qquad (4.14)$$

де $a(0)=\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$, а $a_{01}, a_{02}-$ довільні комплексні числа.

Підрахуємо суми для *a(t)*. Маємо:

$$\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\frac{\dfrac{a_0q_1^{m-k-1}}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-k-1}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}}=\frac{(-1)^{t-1}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{k}a_0q_1^{m-k-1}}{(-1)^{k}}-\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{k}\sqrt{\dfrac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-k-1}}{(-1)^{k}}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{t-1}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}\left[a_0q_1^{m-1}\sum_{k=0}^{t-1}\left(-\frac{\sqrt{S_1b_2}}{q_1}\right)^{k}-\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-1}\sum_{k=0}^{t-1}\left(-\frac{\sqrt{S_1b_2}}{q_2}\right)^{k}\right],$$

де $\displaystyle\sum_{k=0}^{t-1}\left(-\frac{\sqrt{S_1b_2}}{q_1}\right)^{k}=\frac{\left(-\dfrac{\sqrt{S_1b_2}}{q_1}\right)^{t}-1}{\left(-\dfrac{\sqrt{S_1b_2}}{q_1}\right)-1}=\frac{1-\dfrac{\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}{q_1^{t}}}{\dfrac{\sqrt{S_1b_2}+q_1}{q_1}}=\frac{q_1^{t}-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}{q_1^{t-1}\left(\sqrt{S_1b_2}+q_1\right)}$

та аналогічно $\displaystyle\sum_{k=0}^{t-1}\left(-\frac{\sqrt{S_1b_2}}{q_2}\right)^{k}=\frac{q_2^{t}-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}{q_2^{t-1}\left(\sqrt{S_1b_2}+q_2\right)}$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^{t-k-1}\frac{\dfrac{a_0q_1^{m-k-1}}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-k-1}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}}=$$

$$=\frac{(-1)^{t-1}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}\left[a_0q_1^{m-1}\frac{q_1^{t}-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}{q_1^{t-1}\left(\sqrt{S_1b_2}+q_1\right)}-\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-1}\frac{q_2^{t}-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}{q_2^{t-1}\left(\sqrt{S_1b_2}+q_2\right)}\right] \tag{4.15}$$

$$\sum_{k=0}^{t-1}\frac{1}{2}\frac{\dfrac{a_0q_1^{m-k-1}}{2}+\sqrt{\dfrac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-k-1}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t-k}}=\frac{1}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^{t}}\times$$

$$\times\left[a_0q_1^{m-1}\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\sqrt{S_1b_2}}{q_1}\right)^{k}+\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0q_2^{m-1}\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\sqrt{S_1b_2}}{q_2}\right)^{k}\right],$$

де $\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\sqrt{S_1 b_2}}{q_1}\right)^k=\frac{\left(\frac{\sqrt{S_1 b_2}}{q_1}\right)^t-1}{\left(\frac{\sqrt{S_1 b_2}}{q_1}\right)-1}=\frac{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t-q_1^t}{q_1^{t-1}\left(\sqrt{S_1 b_2}-q_1\right)}$

та аналогічно $\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\sqrt{S_1 b_2}}{q_2}\right)^k=\frac{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t-q_2^t}{q_2^{t-1}\left(\sqrt{S_1 b_2}-q_2\right)}$

Далі, якщо $\sqrt{S_1 b_2}\neq q_1$ та $\sqrt{S_1 b_2}\neq q_2$:

$$\sum_{k=0}^{t-1}\frac{1}{2}\frac{\frac{a_0 q_1^{m-k-1}}{2}+\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-k-1}}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^{t-k}}=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left[a_0 q_1^{m-1}\frac{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t-q_1^t}{q_1^{t-1}\left(\sqrt{S_1 b_2}-q_1\right)}+\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-1}\frac{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t-q_2^t}{q_2^{t-1}\left(\sqrt{S_1 b_2}-q_2\right)}\right] \qquad (4.16)$$

Підставимо (4.15),(4.16) в (4.14) та одержимо $a(t)=\begin{pmatrix}a_1(t)\\ a_2(t)\end{pmatrix}$, де:

$$a_1(t)=\frac{(-1)^t a_{01}}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}+\frac{(-1)^{t-1}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\left[\alpha_0 q_1^{m-t}\frac{q_1^t-\left(-\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1 b_2}+q_1\right)}-\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\frac{q_2^t-\left(-\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1 b_2}+q_2\right)}\right]$$

$$a_2(t)=\frac{a_{02}}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}-\frac{1}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\left[\alpha_0 q_1^{m-t}\frac{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t-q_1^t}{\left(\sqrt{S_1 b_2}-q_1\right)}+\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\frac{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t-q_2^t}{\left(\sqrt{S_1 b_2}-q_2\right)}\right]$$

Тепер за допомогою формули (4.7), знаходимо всі розв’язки рівняння (4.2):

$$u(t)=N^{-1}\begin{pmatrix}a(t)\\ b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -\sqrt{\frac{S_1}{b_2}} & \sqrt{\frac{S_1}{b_2}} & 0\\ \frac{S_2}{b_2} & \frac{S_2}{b_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1(t)\\ a_2(t)\\ b(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1(t)+a_2(t)\\ \sqrt{\frac{S_1}{b_2}}\left(a_2(t)-a_1(t)\right)\\ \frac{S_2}{b_2}\left(a_1(t)+a_2(t)\right)+b(t)\end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

Обчислимо $a_1(t)+a_2(t)$ та $a_2(t)-a_1(t)$:

$$a_1(t)+a_2(t)=\frac{(-1)^t a_{01}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}+\frac{(-1)^{t-1}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left[\alpha_0 q_1^{m-t}\frac{q_1^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_1\right)}-\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\frac{q_2^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_2\right)}\right]+$$

$$+\frac{a_{02}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}-\frac{1}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left[\alpha_0 q_1^{m-t}\frac{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t-q_1^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_1\right)}+\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\frac{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t-q_2^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_2\right)}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^t a_{01}+a_{02}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left(\frac{q_1^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_1\right)}+\frac{(-1)^{t-1}\left(q_1^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_1\right)}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left(\frac{q_2^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_2\right)}+\frac{(-1)^{t-1}\left(q_2^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_2\right)}\right)$$

$$a_2(t)-a_1(t)=\frac{a_{02}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}-\frac{1}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left[\alpha_0 q_1^{m-t}\frac{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t-q_1^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_1\right)}+\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\frac{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t-q_2^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_2\right)}\right]-$$

$$-\frac{(-1)^t a_{01}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}-\frac{(-1)^{t-1}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left[\alpha_0 q_1^{m-t}\frac{q_1^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_1\right)}-\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\frac{q_2^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_2\right)}\right]=$$

$$=\frac{a_{02}-(-1)^t a_{01}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left(\frac{q_1^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_1\right)}-\frac{(-1)^{t-1}\left(q_1^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_1\right)}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\left(\frac{q_2^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}{\left(\sqrt{S_1b_2}-q_2\right)}-\frac{(-1)^{t-1}\left(q_2^t-\left(-\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{\left(\sqrt{S_1b_2}+q_2\right)}\right)$$

Нехай *t* – непарне, тоді:

$$a_1(t)+a_2(t)=\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\cdot\frac{\left(q_1+\sqrt{S_1b_2}\right)\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)-\left(q_1-\sqrt{S_1b_2}\right)\left(q_1^t+\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{S_1b_2-q_1^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\frac{\left(q_2+\sqrt{S_1b_2}\right)\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)-\left(q_2-\sqrt{S_1b_2}\right)\left(q_2^t+\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{S_1b_2-q_2^2}+\frac{a_{02}-a_{01}}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}-a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t+1}\sqrt{S_1b_2}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{S_1b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\sqrt{S_1b_2}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1b_2}\right)^t\right)}{S_1b_2-q_2^2}\right)$$

$$a_2(t)-a_1(t)=\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\frac{\left(q_1+\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)+\left(q_1-\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_1^t+\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\frac{\left(q_2+\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)+\left(q_2-\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_2^t+\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}+\frac{a_{02}+a_{01}}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}+a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}\left(q_1^{t+1}-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^{t+1}\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\left(q_2^{t+1}-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^{t+1}\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right)$$

У цьому випадку розв'язок рівняння (4.2) має для непарних t вигляд;

$$u(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}-a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t+1}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right) \\ \sqrt{\frac{S_1}{b_2}}\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}+a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}\left(q_1^{t+1}-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^{t+1}\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\left(q_2^{t+1}-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^{t+1}\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right) \\ \frac{S_2}{b_2}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}-a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t+1}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right)-\alpha_0 q_1^{m-t-1}\right)+\delta_0 q_3^{m-t-1} \end{pmatrix},$$

де a_{01}, a_{02} - довільні сталі.

Нехай t – парне, тоді:

$$a_1(t)+a_2(t)=\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\frac{\left(q_1+\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)+\left(q_1-\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\frac{\left(q_2+\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)+\left(q_2-\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}+\frac{a_{01}+a_{02}}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{01}+a_{02}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t+1}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right)$$

$$a_2(t)-a_1(t)=\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\frac{\left(q_1+\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)-\left(q_1-\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{s_1}}\beta_0 q_2^{m-t}}{2\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\frac{\left(q_2+\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)-\left(q_2-\sqrt{S_1 b_2}\right)\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}+\frac{a_{02}-a_{01}}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}-a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right)$$

Тому розв'язок рівняння (4.2) для парних t має вигляд, де a_{01}, a_{02} - довільні сталі:

$$u(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{01}+a_{02}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t+1}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right) \\ \sqrt{\frac{S_1}{b_2}}\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{02}-a_{01}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t}\sqrt{S_1 b_2}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right) \\ \frac{S_2}{b_2}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t}\cdot\left(a_{01}+a_{02}+\frac{\alpha_0 q_1^{m-t+1}\left(q_1^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_1^2}+\frac{\sqrt{\frac{b_2}{S_1}}\beta_0 q_2^{m-t-1}\left(q_2^t-\left(\sqrt{S_1 b_2}\right)^t\right)}{S_1 b_2-q_2^2}\right)-\alpha_0 q_1^{m-t-1}\right)+\delta_0 q_3^{m-t-1} \end{pmatrix}$$

Отже з урахуванням формули (4.8) гіперплощина допустимих початкових значень має вигляд:

$$\{u_0\}=\left\{\begin{pmatrix} a_{01}+a_{02} \\ \sqrt{\frac{S_1}{b_2}}\left(a_{02}-a_{01}\right) \\ \frac{S_2}{b_2}\left(a_{01}+a_{02}-\alpha_0 q_1^{m-1}\right)+\delta_0 q_3^{m-1} \end{pmatrix} : a_{01},\ a_{02}\in\mathbb{C}\right\}.$$

Якщо $a_{01}, a_{02}\in\mathbb{R}$, то $u_0 \in\mathbb{R}^3$ та $u(t) \in\mathbb{R}^3$ для будь − якого $t = 0,1, \ldots , m-1$.

Отримана вектор-функція $u(t)$ дає загальний розв'язок неявного лінійного різницевого рівняння (3.4) з виродженою матрицею Леслі $L=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \end{pmatrix}$ при $b_1=b_3=0$ і вектором міграційних елементів $f(t)=\begin{pmatrix} \alpha q_1^t \\ \beta q_2^t \\ \delta q_3^t \end{pmatrix}$, де $\alpha,\beta,\delta,q_1,q_2,q_3>0$ і $q_j\neq\sqrt{S_1 b_2}$ $(j=1,2)$. Одержана гіперплощина початкових даних описує допустимі розподіли чисельності популяції в усіх трьох вікових групах в момент часу m.

Висновки

У роботі викладена класична модель Леслі та її модифікація з [4], що призводить до неявного лінійного різницевого рівняння. Роботу присвячено розв’язанню різницевих рівнянь, зокрема, побудові загального розв’язку тих різницевих рівнянь, які виникають при опису зазначених моделей. Також викладено елементи теорії неявних лінійних неоднорідних різницевих систем, зокрема результати [1] щодо розв’язності цих систем. Ці результати застосовано до моделі Леслі, яка описується за допомогою неявного лінійного різницевого рівняння. Окремо розглянуто приклад двох та трьох вікових груп та вектору міграційних елементів, які утворюють геометричну прогресію.

Перелік літератури

1. M.F. Bondarenko, A.G. Rutkas On a class of implicit difference equations // Доповіді НАН України № 7, 11–15(1998).
2. M.F. Bondarenko, L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, Discrete Optimal Control of Descriptor Systems with Variable Parameters, Journal of Automation and Information Sciences, 43, №. 5, 1–9 (2011).
3. M.F. Bondarenko, L.A. Vlasenko, A linear quadratic regulator problem for descriptor lumped and distributed systems with discrete time, Journal of Automation and Information Sciences, 42, №1, 32–41 (2010).
4. S. L. Campbell Singular system of differential equations. London 1980.
5. S.L. Gefter, A.L. Piven, Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation in Banach and Locally Convex Spaces, J. Math. Physics, Analysis, Geometry, 15, № 3, 336 – 353 (2019).
6. P.H. Leslie On the use of matrices in certain population mathematics, Biometrica, 33, № 3,183–212 (1945).