Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

на тему **«Поліноми Ерміта та базис в $L^2(\mathbb{R})$»**

Виконала: студентка групи МП41 IV курсу,
спеціальності 113
Прикладна математика
Павленко В.М.

Керівник: доктор фіз.-мат. наук
професор кафедри
прикладної математики
Фардигола Л.В.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
Макаров О.А.

Харків — 2023 рік

Анотації

Павленко В.М. Поліноми Ерміта та базис в $L^2(\mathbb{R})$.

У роботі вивчено функції Ерміта та поліноми Ерміта. Розглядається ортогональний базис, породжений цими функціями. За допомогою цього базису розв'язується задача наближеної керованості для рівнянь теплопровідності на півосі.

Pavlenko V.M. Hermite polynomials and a basis in $L^2(\mathbb{R})$.

The Hermit polynomials and the Hermit functions are studied in the paper. The orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$ genereted by these functions is considered. With the aid of this basis the approximate controllability problem for the heat equations on a half-axis is solved.

Зміст

Розділ 1. Вступ

У роботі [3] розглянуто керовану систему для рівняння теплопровідності на півосі.

$$w_t = w_{xx}, \qquad x \in (0,\infty), \quad t \in (0,T) \tag{1.1}$$

$$w(0,t) = u(t), \qquad t \in (0,T) \tag{1.2}$$

$$w(x,0) = w^0(x), \qquad x \in (0,\infty) \tag{1.3}$$

$$w(x,T) = w^T(x), \qquad x \in (0,\infty), \tag{1.4}$$

де $T > 0$, $w^0 \in L^2(0,+\infty)$, $w^T \in L^2(0,+\infty)$, а $u \in L^\infty(0,T)$ є керуванням.

У цій роботі було розглянуто проблему наближеної керованості для цієї системи.

Означення 1.1. Стан $w^0 \in L^2(0,+\infty)$ керованої системи (1.1)–(1.4) називається наближено керованим у стан $w^T \in L^2(0,+\infty)$ за час T, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує керування $u_\varepsilon \in L^\infty(0,+\infty)$, для якого розв'язок w_ε задачі (1.1)–(1.3) з $u = u_\varepsilon$ задовольняє умову

$$\left\| w_\varepsilon(\cdot,T) - w^T \right\|_{L^2(0,+\infty)} < \varepsilon.$$

У роботі [3] також доведено наступну теорему.

Теорема 1.2. *Кожний стан $w^0 \in L^2(0,+\infty)$ є наближено керованим у будь-який стан $w^T \in L^2(0,+\infty)$ цієї системи за час T.*

У роботі [3] також доведено, що керована система (1.1)–(1.3) еквівалентна керованій системі

$$v_t = -\sigma^2 v - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i\sigma u, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,T), \tag{1.5}$$

$$v(\sigma, 0) = v^0(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

$$v(\sigma, T) = v^T(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

де $v^0 \in L^2_{odd}(\mathbb{R})$ і $v^T \in L^2_{odd}(\mathbb{R})$ визначаються за функціями w^0 і w^T, відповідно, а u є тим самим, що і в задачі (1.1)–(1.3). Тут і далі через $L^2_{odd}(\mathbb{R})$ позначено підпростір непарних функцій з $L^2_{odd}(\mathbb{R})$.

Для цієї керованої системи проблема наближеної керованості набуває наступного вигляду.

Означення 1.3. Стан $v^0 \in L^2_{odd}(\mathbb{R})$ керованої системи (1.5)–(1.7) називається наближено керованим у стан $v^T \in L^2_{odd}(\mathbb{R})$ за час T, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує керування $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T)$, для якого розв'язок v_ε задачі (1.5), (1.6) з $u = u_\varepsilon$ задовольняє умову

$$\left\| v_\varepsilon(\cdot, T) - v^T \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Зазначимо, що перевагою системи (1.5)–(1.7) у порівнянні із системою (1.1)–(1.4) є той факт, що у випадку системи (1.5)–(1.7)ми маємо справу із звичайним диференціальним рівнянням (1.5), натомість, у випадку системи (1.1)–(1.4) ми маємо справу з рівнянням з частинними похідними, що набагато складніше.

Далі ми будемо досліджувати керовану систему (1.5)–(1.7). З результатів роботи [3] випливає наступна теорема.

Теорема 1.4. *Кожний стан $v^0 \in L^2_{odd}(\mathbb{R})$ є наближено керованим у будь-який стан $v^T \in L^2_{odd}(\mathbb{R})$ цієї системи за час T.*

Кваліфікаційну роботу присвячено вивченню алгоритму побудови керувань $u \in L_\infty(0, T)$, які розв'язують задачу наближеної керованості системи (1.5)–(1.7) за час T для заданих $v^0 \in L^2(\mathbb{R})$ і $v^T \in L^2(\mathbb{R})$.

Запишемо розв'язок задачі Коші (1.5), (1.6):

$$v(\sigma,t) = e^{-t\sigma^2} v^0(\sigma) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i\sigma \int\limits_0^T e^{-(T-\xi)\sigma^2} u(\xi) d\xi, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Позначимо

$$\left(\Psi_T u\right)(\sigma) := \sigma \int\limits_0^T e^{-(T-\xi)\sigma^2} u(\xi) d\xi, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$v^{0,T}(\sigma) = e^{-T\sigma^2} v^0(\sigma) - v^T(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Зрозуміло, що $v^{0,T} \in L^2(\mathbb{R})$. Тоді (див. [3] і означення (1.3)) стан v^0 системи (1.5)–(1.7) є наближено керованим у стан v^T цієї системи у тому і лише тому випадку, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_\varepsilon \in L^\infty(0,T) \quad \left\| v^{0,T} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \Psi_T(u_\varepsilon) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Тому далі ми будемо досліджувати саме виконання умови (1.9) для будь-якої фіксованої функції $v^{0,T} \in L^2(\mathbb{R})$. Для побудови керувань, які задовольняють цю умову буде використано систему функцій Ерміта, яка задає базис в $L^2(\mathbb{R})$, і керування спеціального вигляду, запропоновані в роботі [3].

Розділ 2. Поліноми Ерміта

Дана робота присвячена розгляду питання про поліноми Ерміта та базис в $L^2(\mathbb{R})$. У математиці поліноми Ерміта — це класична ортогональна поліноміальна послідовність. Ми можемо зустріти їх у розділах теорії ймовірності, чисельному аналізі як квадратуру Гауса, фізиці, а також в рівняннях теплопровідності. Пафнутій Чебишев детально вивчав поліноми Ерміта, але його роботи не помічали, і пізніше вони були названі на честь Чарльза Ерміта, який написав про них в 1864 році, хоча вони не були відкриті саме ним.

Дамо класичне визначення поліномів Ерміта.

Означення 2.1. Поліномами Ерміта називається послідовність поліномів H_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, що визначаються співвідношеннями

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Степінь полінома H_n дорівнює n, де $n \in \mathbb{N}_0$.

Поліноми Ерміта можна явно подати у вигляді:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= n! \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \\ &= n! \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{k-l}}{(2l)!(k-l)!} (2x)^{2l}, & n = 2k \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{k-l}}{(2l+1)!(k-l)!} (2x)^{2l+1}, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Розглянемо властивості поліномів Ерміта:

- *Симетрія.*

  Бачимо, що поліноми H_n є парними або непарними в залежності від n:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

- *Ортогональність.*

  Поліноми Ерміта утворюють повну ортогональну систему на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ з вагою e^{x^2} Тобто маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad \forall m \neq n.$$

  Крім того, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$ є дельтою Кронекера.

- *Повнота.*

  Поліноми Ерміта утворюють ортогональний базис гільбертового простору функцій, що задовольняють

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f(x)^2 \right| e^{-x^2} dx < \infty,$$

  тобто простору $L^2(\mathbb{R})$ з вагою e^{-x^2}.

- *Формула додавання.*

  Маємо:

$$\frac{(a_1^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\mu!} H_\mu \left[\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_n^2}} \right]$$
$$= \sum_{m_1 + \cdots + m_n = \mu} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1}(x_1) \cdots H_{m_n}(x_n).$$

Розділ 3. Розвинення функцій в ряди Фур'є відносно базису функцій Ерміта $\{\psi^n\}_{\mathbb{N}_0}$

3.1. Базис в $L^2(\mathbb{R})$

Функції Ерміта утворюють ортогональний базис гільбертового простору функцій. Для $n \geq m$, поліном Ерміта має вигляд

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx &= (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2})^n H_m(x) dx \\
&= (-1)^n \left((e^{-x^2}) H_m(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2})^{(n-1)} H_m' dx \right) \\
&= (-1)^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2})^{(n-1)} H_m' dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}(x) H_m' dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-2}(x) H_m'' dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-m}(x) H_m^m dx
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0(x)H_m^{(m)}(x)e^{-x^2}dx, \quad n = m, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n-m-1}(x)H_m^{(m+1)}(x)e^{-x^2}dx, \quad n > m, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0(x)H_m^{(m)}(x)e^{-x^2}dx, \quad n = m, \\ 0, \quad n > m, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Для $m \in \mathbb{N}_0$ маємо:

$$H_m^{(m)}(x) = ((2x)^m + \text{ степені } x \text{ меньші за } m)^{(m)} = 2^m m!, \quad x \in \mathbb{R}.$$

За формулою Ейлера–Пуассона, яка має вигляд:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},$$

одержуємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0(x)H_m^{(m)}(x)e^{-x^2}dx = 2^m m! \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2^m m!\sqrt{\pi}.$$

З розрахунків приведених вище випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0(x)H_m e^{-x^2} = 2^m m! \delta_n^m \sqrt{\pi}.$$

Будемо розглядати гільбертів простір $L^2(\mathbb{R})$, який є сепарабельним (тобто простором, в якому є не більш ніж зліченна всюди щільна множина), і систему елементів $\{\psi^n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset L^2(\mathbb{R})$ із цього простору, яку можна подати у вигляді

$$\psi^n(x) = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Цю систему елементів будемо називати системою функцій Ерміта в $L^2(\mathbb{R})$. З цього випливає дві теореми.

Теорема 3.1. *(про ортонормованість системи функцій Ерміта в $L^2(\mathbb{R})$). Система функцій Ерміта $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є ортонормованою в $L^2(\mathbb{R})$.*

Теорема 3.2. *(про повноту системи функцій Ерміта в $L^2(\mathbb{R})$). Система функцій Ерміта $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є повною в $L^2(\mathbb{R})$.*

З цих двох теорем випливає, що система функцій Ерміта $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є базисом в $L^2(\mathbb{R})$. Для будь-якого $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f_n = \langle f, \psi^n \rangle = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Розділ 4. Розвинення функцій в ряди Фур'є відносно базису $\{\psi^n\}_{\mathbb{N}\cup\{0\}}$

Розглянемо приклади розвинення в ряд Фур'є відносно базису $\{\psi^n\}_{\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Доведемо два співвідношення:

$$\sqrt{2}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\psi_{2n+1}(x), \tag{4.1}$$

$$\sqrt{2}\,(e\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\psi_{2n+1}(x) \tag{4.2}$$

де

$$\psi_{2n+1}(x) = \frac{H_{2n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{(2n+1)!}}, \quad H_{2n+1} = (2n+1)!\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}(2x)^{2l+1}}{(2l+1)!(n-l)!}.$$

Доведення (4.1). Підставимо у співвідношення (4.1) значення $\varphi_{2n+1}(x)$:

$$\sqrt{2}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n+1)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{(2n+1)!}}.$$

Поділимо обидві частини на $\sqrt{2}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ та зведемо подібні.

$$\begin{aligned}\sin x &= e^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{2^{2n+1}(2n+1)!}\\ &= e^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n+1}(2n+1)!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n+l}(2x)^{2l+1}}{(2l+1)!(n-l)!}\end{aligned}$$

Поміняємо суми місцями:

$$e^{-\frac{1}{4}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l 2^{2l+1}}{(2l+1)!}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{x^{2l+1}}{2^{2n+1}(n-l)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{4}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l+1} x^{2l+1}}{(2l+1)!} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}(n-l)!} \\
&\underset{n=l+m}{=} e^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l+1} x^{2l+1}}{(2l+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2l+1} 2^{2m}(m)!} \\
&= \left[e^{\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^m}{m!}, \xi = \frac{1}{4} \right] = e^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} = \sin x.
\end{aligned}
$$

Таким чином, співвідношення (4.1) доведено. □

Доведення (4.2). Підставимо у співвідношення (4.2) значення $\varphi_{2n+1}(x)$:

$$
\sqrt{2}\,(e\pi)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^n \sqrt{(2n+1)!} \pi^{\frac{1}{4}} 2^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{(2n+1)!}}.
$$

Поділимо обидві частини на $\sqrt{2}\,(e\pi)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ та зведемо подібні.

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}(x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} \\
&= e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(2n+1)!} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l}(2x)^{2l+1}}{(2l+1)!(n-l)!}.
\end{aligned}
$$

Поміняємо суми місцями:

$$
\begin{aligned}
&e^{\frac{1}{4}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+1} x^{2l+1}}{(2l+1)!} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{(-1)^{n-l}}{2^{2n+1}(n-l)!} \underset{n=l+m}{=} e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2l+1} x^{2l+1}}{(2l+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2l+1} 2^{2m}(m)!} \\
&= \left[e^{-\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi^m}{m!}, \xi = -\frac{1}{4} \right] = e^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} = \sinh x.
\end{aligned}
$$

Таким чином, співвідношення (4.2) доведено. □

Позначимо

$$
f_1(x) = \sqrt{2} \left(\frac{e}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(x), \quad f_2(x) = \sqrt{2}\,(e\pi)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sinh(x), \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Таким чином, формули (4.1) і (4.2) подають ряди Фур'є відносно системи функцій Ерміта для функцій

$$
f_1 \in L^2(\mathbb{R}), \quad f_2 \in L^2(\mathbb{R}).
$$

Розділ 5. Збіжність рядів Фур'є

Оцінемо норми різниць функцій f_1, f_2 і часткових сум рядів Фур'є в $L^2(\mathbb{R})$.

- Нехай
$$f_1^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\psi_{2n+1}(x).$$
Тоді
$$\left(\left\|f_1 - f_1^N\right\|\right)_{L^2(\mathbb{R})} < \sqrt{\frac{1}{2^{2N}(2n+3)!}\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}.$$
Зручно оцінювати норму в квадраті, тому маємо:
$$\begin{aligned}
&\left(\left\|f_1 - f_1^N\right\|\right)^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left(\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x)\right\|\right)^2 \\
&= \left(\left\|\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x)\right\|\right)^2 \\
&= \left(\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x)\right\|\right)^2.
\end{aligned}$$
Замінимо на скалярний добуток, маємо:
$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\varphi_{2n+1}(x), \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m\sqrt{(2m+1)!}}\varphi_{2m+1}(x) \right\rangle \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}\right|^2 \left\langle \varphi_{2n+1}(x), \varphi_{2m+1}(x)\right\rangle \underset{n=m}{=}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \right|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}}$$

$$\underset{n=m+N+1}{=} \frac{1}{2^{2N+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2(m+N+1)+1)!}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{2N}(2n+3)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2N}(2n+3)!} \cosh\left(\frac{1}{2}\right).$$

Треба вилучити з-під кореня і отримаємо:

$$\left(\|f_1 - f_1^N\|\right)_{L_2(\mathbb{R})} < \sqrt{\frac{1}{2^{2N}(2n+3)!} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)},$$

оскільки

$$\begin{aligned}(2m+2N+3)! &= (2N+3)!(2N+4)! \cdots (2N+3+2m)! \\ &\geq (2N+3)!(2m)!. \end{aligned} \tag{5.1}$$

- Нехай
$$f_2^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \psi_{2n+1}(x).$$
Зручно оцінювати норму в квадраті, тому маємо:
$$\begin{aligned}&\left(\|f_2 - f_2^N\|\right)^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left(\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x) \right\|\right)^2 \\ &= \left(\left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x) \right\|\right)^2 \\ &= \left(\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x) \right\|\right)^2. \end{aligned}$$
Замінимо на скалярний добуток, маємо:
$$= \left\langle \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{(2n+1)!}} \varphi_{2n+1}(x), \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m\sqrt{(2m+1)!}} \varphi_{2m+1}(x) \right\rangle$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n \sqrt{(2n+1)!}} \right|^2 \langle \varphi_{2n+1}(x), \varphi_{2m+1}(x) \rangle$$

$$\underset{n=m}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n \sqrt{(2n+1)!}} \right|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{(2n+1)!}}$$

$$\underset{n=m+N+1}{=} = \frac{1}{2^{2N+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(2(m+N+1)+1)!}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{2N}(2n+3)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2N}(2n+3)!} \cosh\left(\frac{1}{2}\right).$$

Треба вилучити з-під кореня і, скориставшись оцінкою, (5.1), отримаємо:

$$\left(\left\| f_2 - f_2^N \right\|\right)_{L_2(\mathbb{R})} < \sqrt{\frac{1}{2^{2N}(2n+3)!} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Розділ 6. Графічна ілюстрація одержаних результатів

Для різних значень N побудуємо графіки функцій f_1, f_1^N - на одному рисунку та f_2, f_2^N - на іншому.

Візьмемо $N = 1$ та $N = 100$ для f_1, f_1^N. На рисунку 1, можемо побачити, що при збільшенні N графік функції f_1^N наближується до графіку функції f_1 (general function).

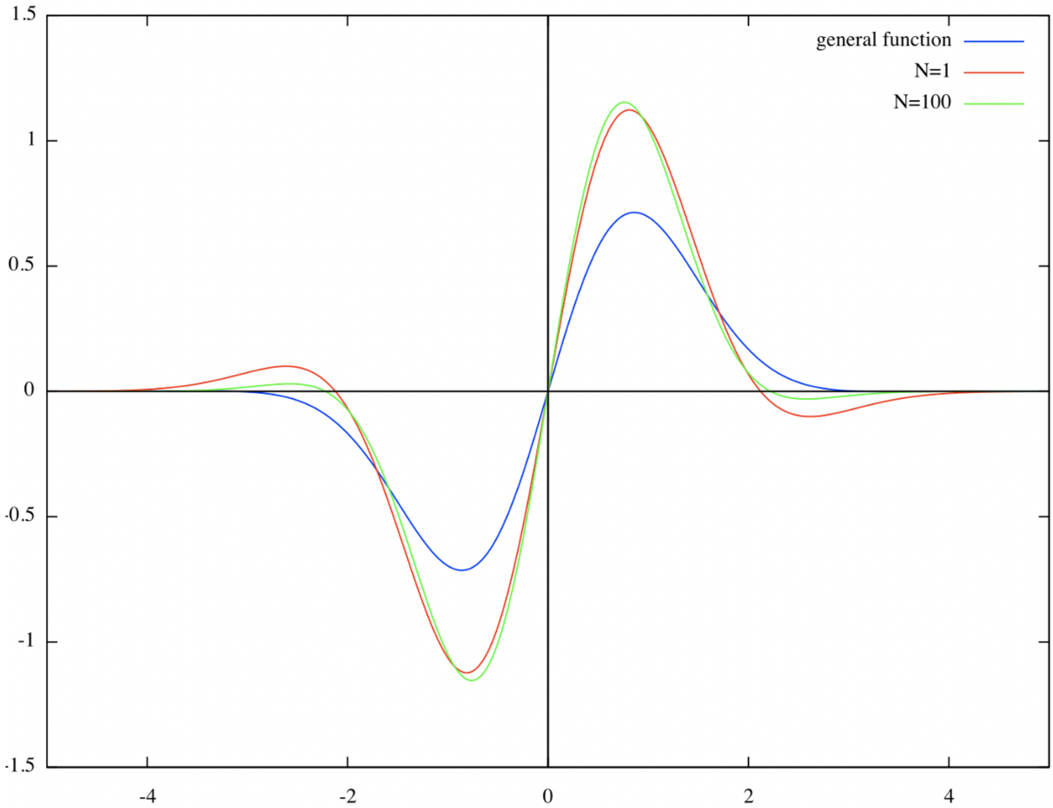

Рис. 1

Аналогічна ситуація відбувається для f_2^N і f_2 (general function) на рисунку 2.

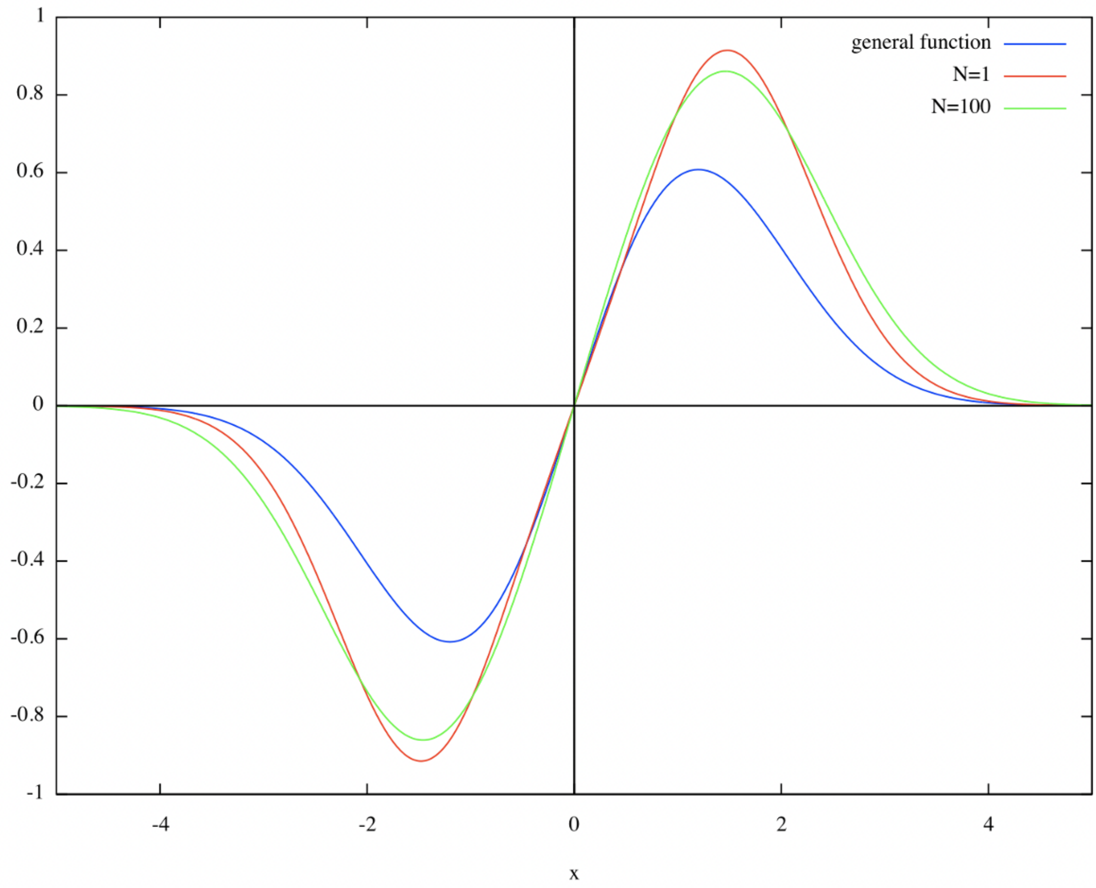

Рис. 2

Розділ 7. Побудова керувань

7.1. Побудова кусково-сталих функцій, що наближують функцію Ерміта

Повернемося до розгляду твердження (1.9). Зафіксуємо будь-яку функцію $v^{0,T} \in L^2(\mathbb{R})$. Тоді

$$v^{0,T} = \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m \psi_{2m+1},$$

де $\nu_m = \langle v^{0,T}, \psi_{2m+1} \rangle$ і ряд у правій частині рівності збігається в $L^2(\mathbb{R})$. Отже, для

$$v_N^{0,T} = \sum_{m=0}^{N} \nu_n \psi_{2n+1} \tag{7.1}$$

маємо

$$\left\| v_N^{0,T} - v^{0,T} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0, \quad \text{коли } N \to \infty. \tag{7.2}$$

Перегруповуючи доданки у скінченній сумі (7.1), одержуємо

$$v_N^{0,T}(\sigma) = \sum_{m=0}^{N} \nu_m \psi_{2m+1}(\sigma) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sigma^{2n+1} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

де $b_n \in \mathbb{R}$.

Позначимо

$$M_n(\sigma) = \sigma^{2n+1} e^{-\frac{\sigma^2}{2}},$$

$$M_n^l(\sigma) = \sigma^{2n+1} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left(\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{l}} - 1}{\frac{\sigma^2}{l}} \right)^{n+1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

та

$$U_l^n(\xi) = \begin{cases} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} l^{n+1}, \quad \xi \in \left(\frac{j}{l}, \frac{j+1}{l}\right), \quad j = \overline{0,n} \\ 0, \quad \xi \notin \left(0, \frac{n+1}{l}\right] \end{cases}.$$

Маємо

$$\varphi_{2n+1}(\sigma) = (2m+1)! \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^{m-p}}{(m-p)!(2p+1)!}(2\sigma)^{2p+1} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$$
$$= (2m+1)! \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^{m-p} 2^{2p+1}}{(m-p)!(2p+1)!} M_p(\sigma).$$

Покажемо, що $\Psi_{1/2} U_l^n(\sigma) = M_n^l(\sigma)$, тобто

$$\Psi_{1/2} U_l^n(\sigma) = \sigma \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)} U_l^n(\xi)\, d\xi = \sigma^{2n+1} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left(\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{l}} - 1}{\frac{\sigma^2}{l}} \right)^{n+1}. \qquad (7.4)$$

Доведення. Підставимо $U_l^n(\xi)$ та обчислимо інтеграл:

$$\sigma \int_{\frac{j}{l}}^{\frac{j+1}{l}} e^{-\sigma^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} l^{n+1} d\xi = \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \int_{\frac{j}{l}}^{\frac{j+1}{l}} e^{\sigma^2 \xi} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} l^{n+1} d\xi$$
$$= e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} l^{n+1} \left. \frac{e^{\xi\sigma^2}}{\sigma^2} \right|_{\frac{j}{l}}^{\frac{j+1}{l}} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \frac{l^{n+1}}{\sigma^2} \left(e^{\frac{(j+1)\sigma^2}{l}} - e^{\frac{j\sigma^2}{l}} \right).$$

Перепишемо цей вираз за допомогою суми:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{l^{n+1}}{\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \left(e^{\frac{(j+1)\sigma^2}{l}} - e^{\frac{j\sigma^2}{l}} \right) (-1)^{n-j}$$
$$= \frac{l^{n+1}}{\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} e^{\frac{k\sigma^2}{l}} (-1)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} e^{\frac{k\sigma^2}{l}} (-1)^{n-k} \right]$$
$$= \frac{l^{n+1}}{\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left[e^{\frac{(n+1)\sigma^2}{l}} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right) e^{\frac{k\sigma^2}{l}} (-1)^{n-k+1} \right].$$

Після скорочення отримуємо:

$$\frac{l^{n+1}}{\sigma}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\left[e^{\frac{(n+1)\sigma^2}{l}}-1+\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}n+1\\k\end{pmatrix}e^{\frac{k\sigma^2}{l}}(-1)^{n-k+1}\right]$$
$$=\frac{l^{n+1}}{\sigma}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n+1\\k\end{pmatrix}e^{\frac{k\sigma^2}{l}}(-1)^{n-k+1}=\frac{l^{n+1}}{\sigma}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\left(e^{\frac{\sigma^2}{l}}-1\right)^{n+1},$$

де

$$\begin{pmatrix}n\\k-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{(k)!(n-k)!}=$$
$$=\frac{n!}{(k)!(n-k+1)!}\left(k+(n-k+1)\right)=\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}=\begin{pmatrix}n+1\\k\end{pmatrix}.$$

Співвідношення (7.4) доведено. □

7.2. Наближення поліномів Ерміта інтегралами від кусково-сталих функцій

Позначимо

$$M_n(\sigma)=\sigma^{2n+1}e^{-\frac{\sigma^2}{2}},$$
$$M_n^l(\sigma)=\sigma^{2n+1}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\left(\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{l}}-1}{\frac{\sigma^2}{l}}\right)^{n+1},\quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

Обчислимо границю

$$\lim_{l\to\infty}\left\|M_n-M_n^l\right\|_{L_2(\mathbb{R})},\quad n=\overline{0,\infty}.$$

Для цього оцінимо квадрат цієї норми

$$\left(\left\|M_n-M_n^l\right\|\right)^2_{L_2(\mathbb{R})}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|M_n-M_n^l\right|^2d\sigma$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^{4n+2}e^{-\sigma^2}\left[\left(\frac{e^{\frac{\sigma^2}{l}}-1}{\frac{\sigma^2}{l}}\right)^{n+1}-1\right]d\sigma.$$

Теорема 7.1. *(Лебега про мажоровану збіжність). Нехай f і f_l є вимірними на $\mathbb{R}$, $\quad l = \overline{0, \infty}$; нехай $f(0) = 0$,*

- $f_l \underset{l \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f$, *м. с. на* $\mathbb{R}$,
- $\exists g \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall l = \overline{0, \infty} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_l(x)| \leqslant g(x)$.

Тоді, $f \in L^1(\mathbb{R})$ *і* $\lim\limits_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_l(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)$.

Першу умову теореми виконано оскільки $M_n^l(\sigma) \to M_n(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Також маємо

$$\left| \frac{e^{\frac{\sigma^2}{l}} - 1}{\frac{\sigma^2}{l}} \right| = \left| \frac{1 + e^{\xi} \frac{\sigma^2}{l} - 1}{\frac{\sigma^2}{l}} \right| = \left| e^{\xi} \right| \leqslant e^{\left| \frac{\sigma^2}{l} \right|}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \ \xi \in \left[0, \frac{\sigma^2}{l} \right],$$

$$\left[\left(\frac{e^{\frac{\sigma^2}{l}} - 1}{\frac{\sigma^2}{l}} \right)^{n+1} - 1 \right]^2 \leqslant e^{2 \frac{n+1}{l} \sigma^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\left| M_n^l(\sigma) \right| &\leqslant \sigma^{4n+2} e^{-\sigma^2} e^{2 \frac{n+1}{l} \sigma^2} = \sigma^{4n+2} e^{-\sigma^{2\left(1 - 2\frac{n+1}{l}\right)}} = \left(\sigma^{4n+2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \right) \left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}} e^{2 \frac{n+1}{l} \sigma^2} \right) \\
&= \sigma^{4n+2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left(e^{-\frac{\sigma^2}{2} \left(1 - 4 \frac{n+1}{l} \right)} \right) \\
&\leqslant e^{4n+2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} =: g(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \ 1 - \frac{4(n+1)}{l} > 0.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\left| M_n^l(\sigma) \right| \leqslant g(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \ l > 4n + 4.$$

Бачимо, що $g \in L^2(\mathbb{R})$, отже, другу умову теореми також виконано, тому

$$\left\| M_n - M_n^l \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \quad \text{коли } l \longrightarrow \infty, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Таким чином, ураховуючи (7.2) і (7.3), одержуємо, що функція $v^{0,T} \in L^2(\mathbb{R})$ може бути наближена лінійними комбінаціями функцій $\Psi_{1/2} U_l^n(\sigma) = M_n^l(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $l > 4n + 4$, в $L^2(\mathbb{R})$, тобто умову (1.9) виконано. Звідси випливає справедливість теореми 1.2.

Висновки

У даній роботі ми познайомилися с поліномами Ерміта та вивчили деякі їх властивості. Розглянули базис побудований на основі цих многочленів та подивилися на поведінку деяких функцій, в яких вони використовувалися. Поліноми Ерміта відіграють велику роль в розв'язанні задач з фізики, наприклад, в рівняннях теплопровідності на нескінченному проміжку.

Список використаних джерел

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials

[2] Радченко В.М. Теорія міри та інтеграла. Київ. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012, с. 78.

[3] Fardigola L., Khalina K. Reachability and Controllability Problems for the Heat Equation on a Half-Axis, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 2019, Vol. 15, No. 1, pp. 57–78.